10 BIZUS DE GEOMETRIA PARA DESTRUIR NA PROVA DO ITA

MATEMÁTICA EM BIZUS

CLAUDIO DE OLIVEIRA E CASTRO

1. INTRODUÇÃO

Grande amigo,

É muito bom ter você por aqui e poder compartilhar essas dicas incríveis para ajudá-lo a se dar bem no Concurso do Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA.

Eu e você sabemos como é concorrido o concurso do ITA, pois o Instituto é referência mundial de excelência na formação de engenheiros de alto nível em suas diversas categorias. Só de você ter mostrado interesse por esse conteúdo já pode se considerar um vencedor.

Este e-book vem justamente, acelerar e aperfeiçoar sua preparação de alto nível e em curto espaço de tempo.

Meu objetivo é que você sinta a eficiência da proposta e ver que com este método será possível otimizar seus cálculos de forma a chegar aos resultados até um 1/3 do tempo que você gasta usando o método tradicional.

Eu sou o Professor Claudio Castro e estarei com você até o dia em que verei seu nome na lista de aprovados do ITA.

Um grande abraço e mãos a obra!

ASSUNTO

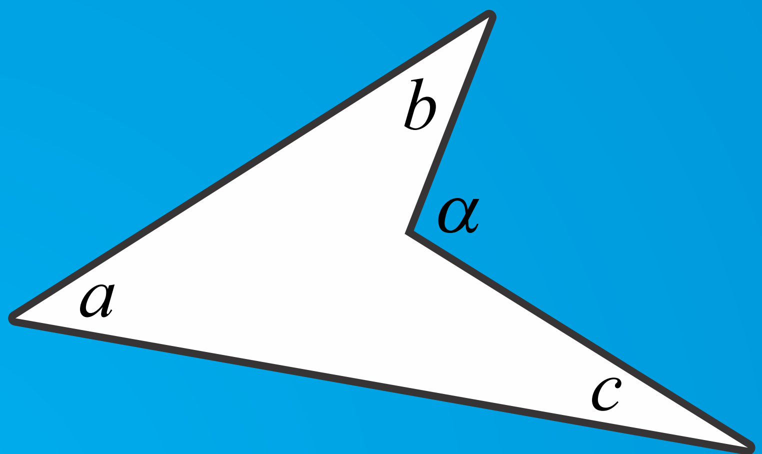
1

CALCULANDO ÂNGULOS RAPIDAMENTE

BIZU #1

A TÉCNICA DO BUMERANGUE

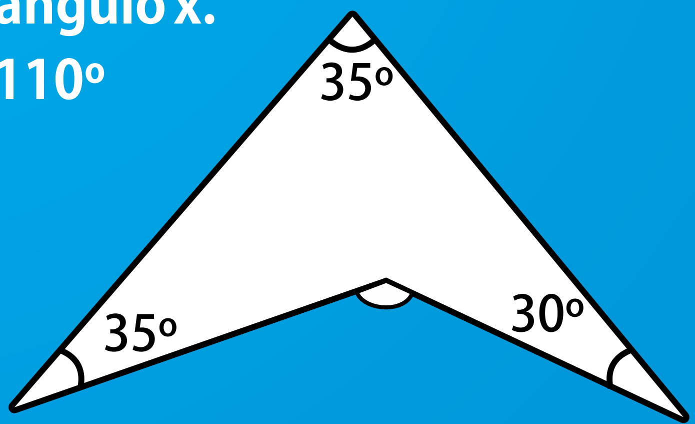
Para calcularmos o Ângulo Externo de um polígono que tenha o aspecto da figura ao lado, podemos utilizar uma técnica que chamo aqui de Técnica do Bumerangue.



Por quê "Técnica do Bumerangue" ? Imagine que, na figura ao lado, um bumerangue parta do ângulo e rebata formando todos os outros ângulos da figura, retornando, então, para a sua posição inicial. Para calcular o valor do ângulo, basta somar todos os ângulos formados pelas sucessivas rebatidas do bumerangue, ou seja, $\boxed{\alpha = a + b + c}$

1) Na figura abaixo, calcule a medida do ângulo x.

a) 70º b) 80º c) 90º d) 100º e) 110º



Aplicando a "Regra do Bumerangue" obtemos:

x=35º+35º+30º
x= 100º

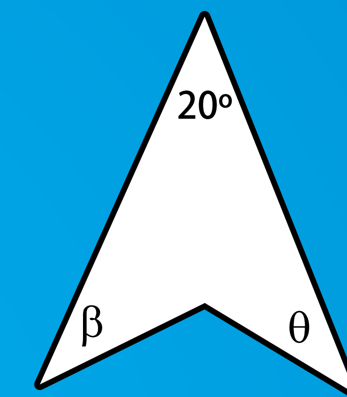
RESPOSTA: LETRA b

BIZU #1

A TÉCNICA DO BUMERANGUE

2) O triângulo ABC, representado na figura abaixo, é isósceles de base BC . A medida do ângulo x assinalado é:

a) 90º b) 100º c) 105º d) 110º e) 120º



Observe que cada ângulo da base vale θ somado a um outro ângulo, que podemos chamar de β. Assim, podemos concluir que:

$20^\circ + 2\theta + 2\beta = 180 \rightarrow 2(\theta+\beta) = 160 \rightarrow \theta+\beta = 80$

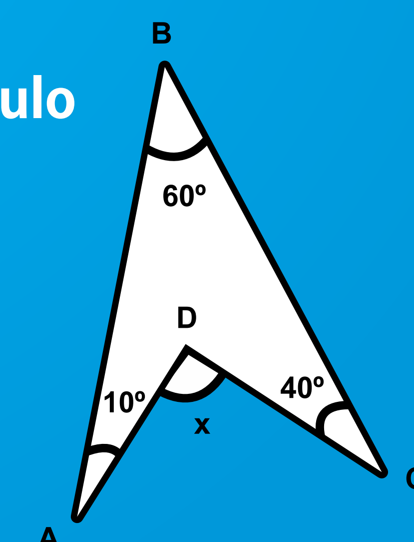
Empregando-se a Regra do Bumerangue, teremos:

$x = 20^\circ(\theta+\beta) \rightarrow x = 20^\circ + 80^\circ \rightarrow x = 100^\circ$

RESPOSTA: LETRA b

3) (PUC) Na figura, x é a medida em graus do ângulo ADC. O valor de x, em graus, é:

a) 80 b) 90 c) 100 d) 110 e) 120



$x = 40^\circ + 10^\circ + 60^\circ$

$x = 110^\circ$

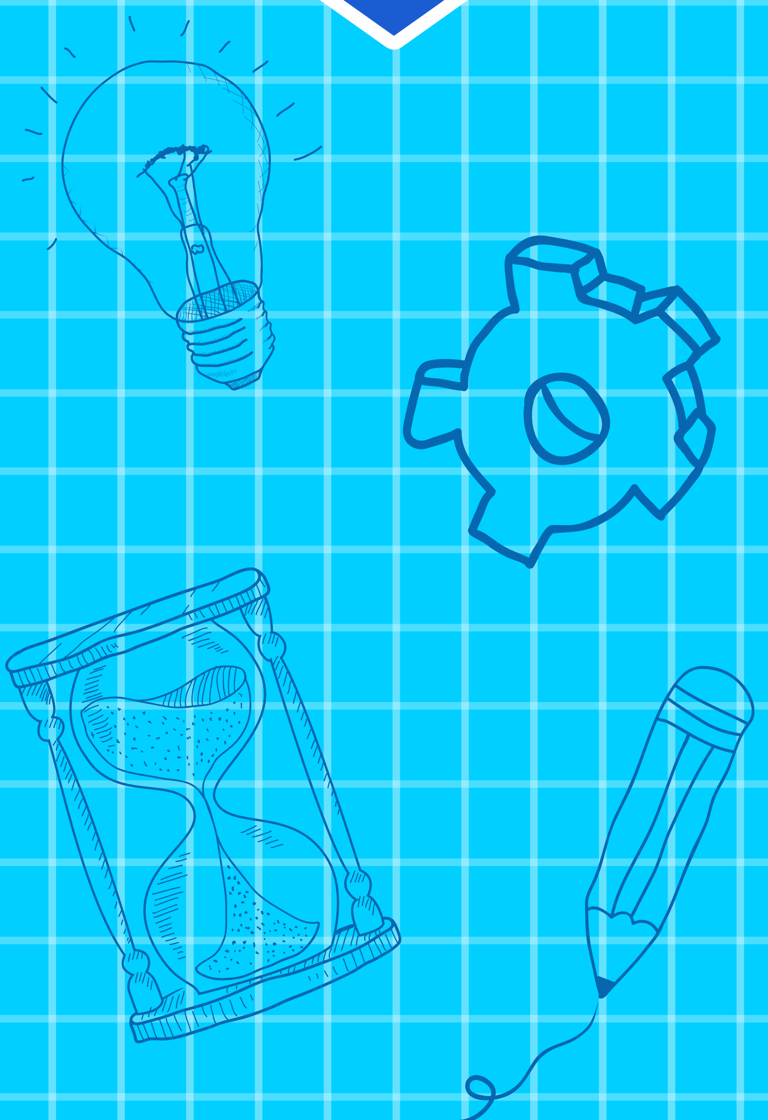
RESPOSTA: LETRA d

ASSUNTO

2

TRIÂNGULOS

BIZU #2



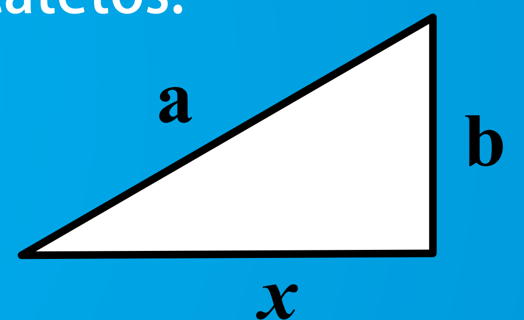
TEOREMA *SEM* PITÁGORAS

Não é novidade para nenhum aluno que o Teorema de Pitágoras é a ferramenta mais completa para se determinar um lado de um triângulo retângulo sendo conhecido os outros dois.

Neste capítulo ensinarei uma ferramenta muito prática para se encontrar o cateto em um triângulo retângulo, quando os outros dois lados são conhecidos. O objetivo aqui é de, apenas, acelerar os cálculos. Obs.: O triângulo <u>não</u> precisa ser pitagórico.

- Conhecendo-se a Hipotenusa e um dos Catetos:

Vamos encontrar o valor do cateto "x" no triângulo ao lado. Para isto, faça o seguinte:

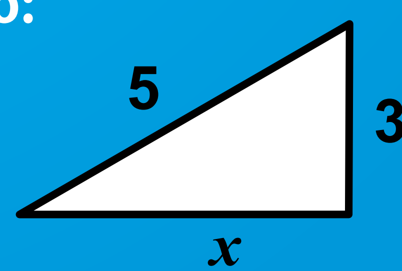


$$x = \sqrt{(a+b).(a-b)}$$

Vejamos o método aplicado nos exemplos abaixo:

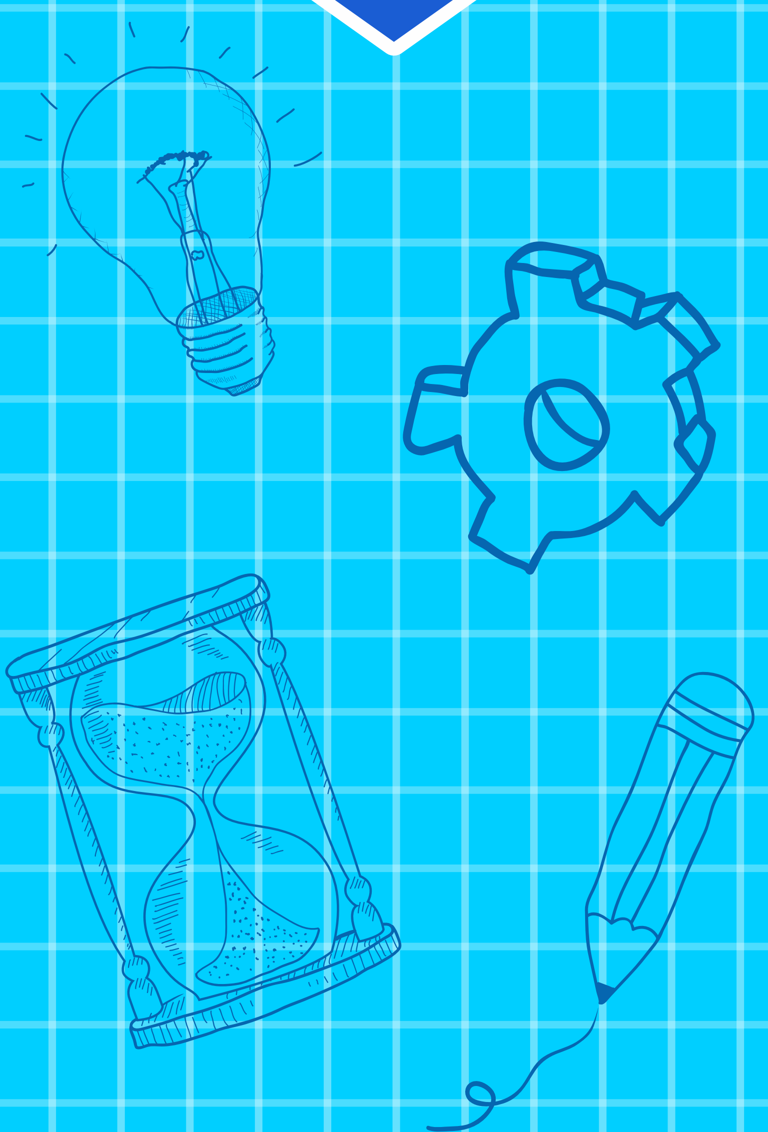
4) Encontre o valor de "x" no triângulo ao lado:

$$x = \sqrt{(5+3).(5-3)} = \sqrt{16} = 4$$



RESPOSTA: $x = 4$

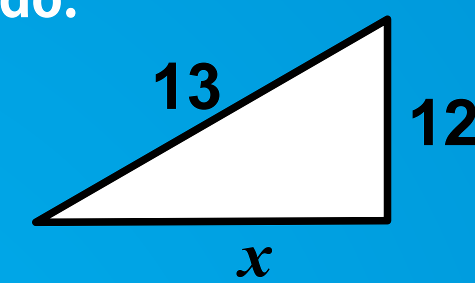
BIZU #2



TEOREMA *SEM* PITÁGORAS

5) Encontre o valor de "y" no triângulo ao lado:

$$x = \sqrt{(13+12).(13-12)} = \sqrt{25} = 5$$



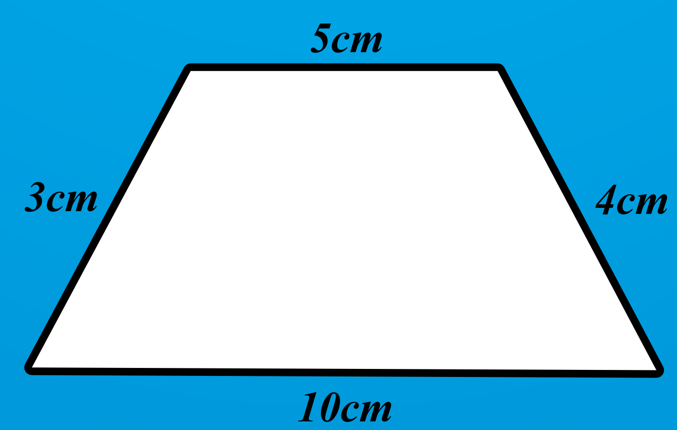
RESPOSTA: $x = 5$

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

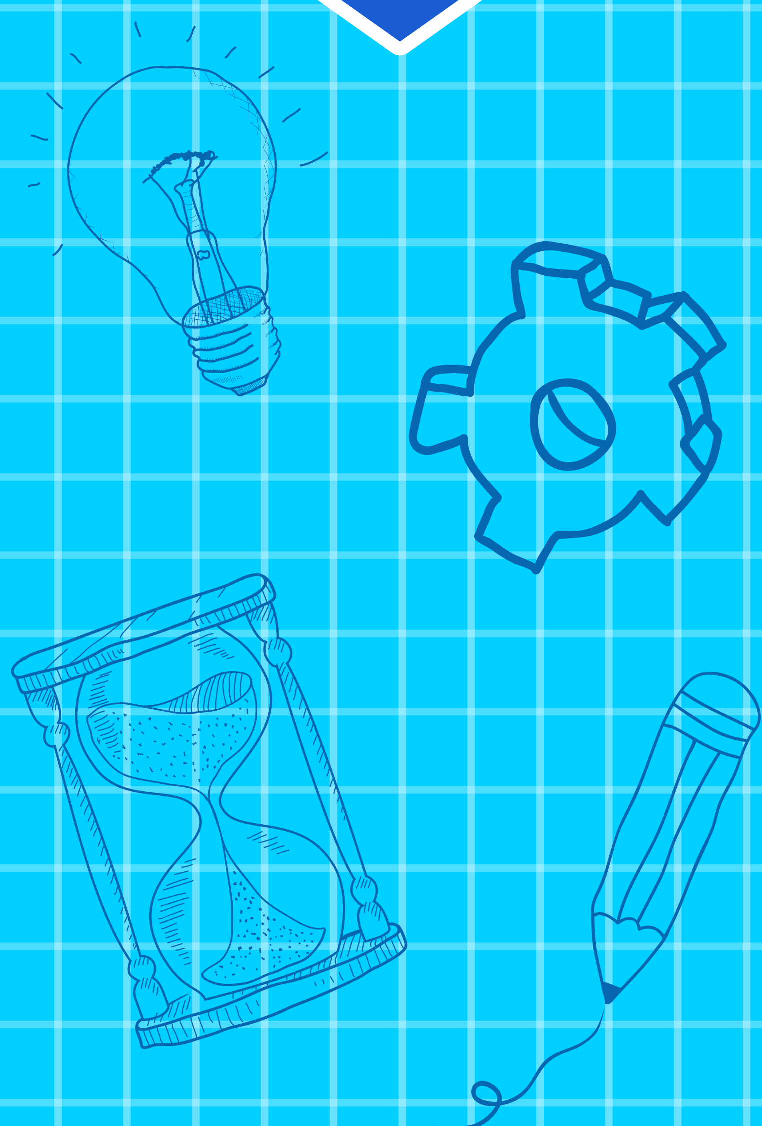
Algumas questões podem ser facilmente resolvidas se utilizarmos o princípio do Triângulo Pitagórico. Triângulo Pitagórico é todo triângulo retângulo onde os lados são números inteiros.

Observe a aplicação da técnica na questão abaixo. Antes, acompanhe como ela poderia ser resolvida pelo método tradicional.

6) Encontre o valor da área do trapézio abaixo.

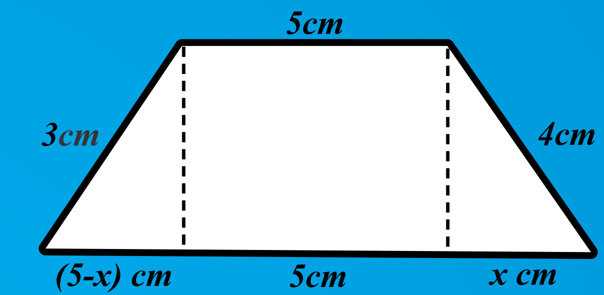


PARA ENTENDER MELHOR

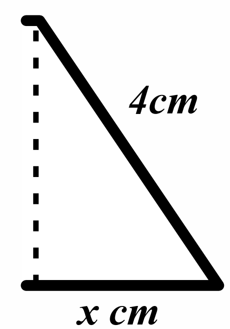


TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS
RESOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL

1 Identificando as medidas dos segmentos:

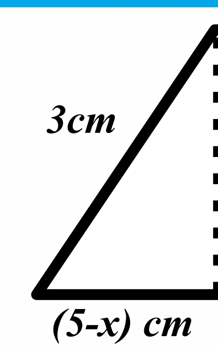


2 Utilizando o Teorema de Pitágoras em ambos para calcular sua altura.



$4^2 = h^2 + x^2 \longrightarrow x^2 = 16 - h^2$

$x = \sqrt{16 - h^2}$



$3^2 = h^2 + (5 - x)^2$

3 Substituindo os valores da primeira equação na Segunda poderemos encontrar a altura

$$9 = h^2 + \left(5 - \sqrt{16 - h^2}\right)^2 \rightarrow 9 = h^2 + 25 - 10\sqrt{16 - h^2} + \left(\sqrt{16 - h^2}\right)^2$$

$$9 = h^2 + 25 - 10\sqrt{16 - h^2} + 16 - h^2 \rightarrow 9 - 15 - 16 = -10\sqrt{16 - h^2}$$

$$-32 = -10\sqrt{16 - h^2} \rightarrow 3{,}2 = \sqrt{16 - h^2} \rightarrow (3{,}2)^2 = \left(\sqrt{16 - h^2}\right)^2$$

$$10{,}24 = 16 - h^2 \rightarrow h^2 = 5{,}76 \rightarrow h = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$$

PARA ENTENDER MELHOR

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

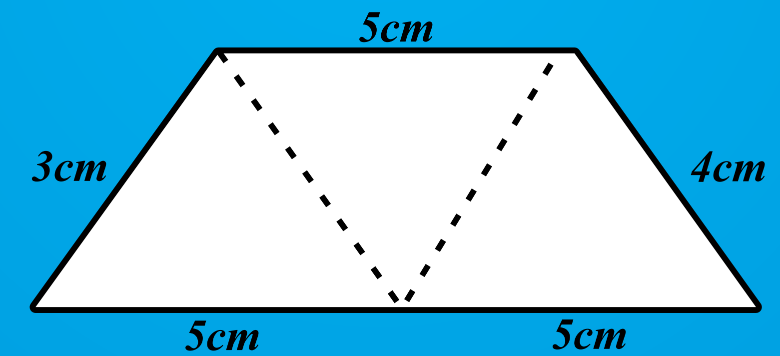
RESOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL

4 **Agora temos que substituir o valor da altura na fórmula da área do trapézio.**

$$\text{Área} = \frac{\text{BASE} + \text{base}}{2} \text{ x altura} \rightarrow \frac{10+5}{2} \text{ x } 2{,}4 = 15\text{x}1{,}2 = 18$$

RESPOSTA: 18 UNIDADES DE ÁREA

RESOLUÇÃO PELO MÉTODO PITAGÓRICO



Dividindo a base de 10cm ao meio e traçando duas diagonais até os vértices opostos, formamos três triângulos pitagóricos de lados 3, 4 e 5cm.

A área do trapézio será igual à soma destes três triângulos Pitagóricos. Assim teremos:

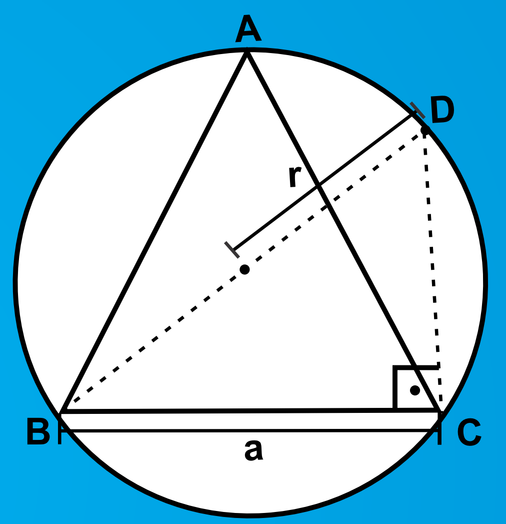
$$\text{Área} = 3 \text{ x } \frac{3\text{x}4}{2} = 3 \text{ x } 6 = 18$$

PARA ENTENDER MELHOR

LEI DOS SENOS

O seno de um ângulo de um triângulo qualquer é proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo.

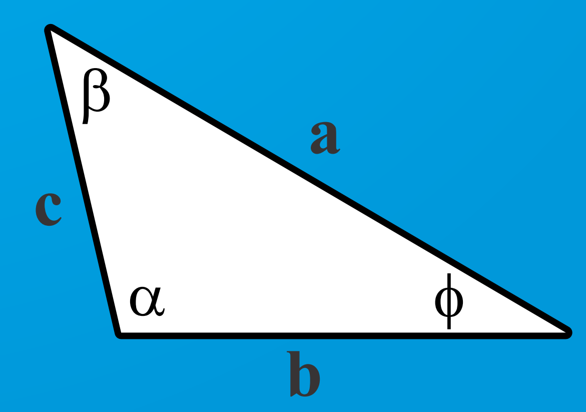
$$\frac{BC}{senA} = \frac{AB}{senC} = \frac{AC}{senB} = 2r$$



LEI DOS COSSENOS

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.c.\cos\phi$$



PARA ENTENDER MELHOR

7) (ITA) Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC a AC. A área do triângulo é (em cm²) igual a:

a) $2sen^2(\alpha).cotg(\beta)+sen(2\alpha)$

b) $2sen^2(\alpha).tg(\beta)-sen(2\alpha)$

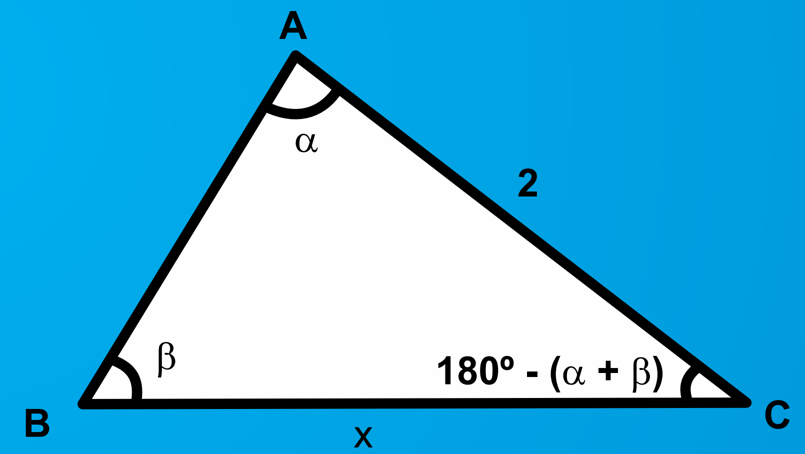
c) $2cos^2(\alpha).cotg(\beta)+sen(2\alpha)$

d) $2cos^2(\alpha).tg(\beta)+sen(2\alpha)$

e) $2sen^2(\alpha).tg(\beta)-cos(2\alpha)$

Vamos considerar a seguinte figura.
Aplicando a Lei dos Senos, temos:

$$\frac{x}{sen(\alpha)}=\frac{2}{sen(\beta)}\rightarrow x=2\cdot\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)}$$



$$Área\ \Delta_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\cdot sen[180°-(\alpha+\beta)]\rightarrow Área\ \Delta_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)}\cdot 2\cdot sen(\alpha+\beta)$$

$$Área\ \Delta_{ABC}=2\cdot\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)}\cdot sen(\alpha+\beta)=\frac{2\cdot sen(\alpha)}{sen(\beta)}\cdot(sen\alpha\cdot\cos\beta+sen\beta\cdot\cos\alpha)$$

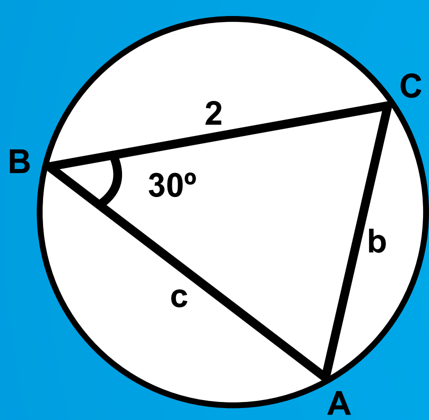
$$Área\ \Delta_{ABC}=2\cdot sen^2(\alpha)\cdot\cot g\beta+sen(2\alpha)$$

RESPOSTA: LETRA a

PARA ENTENDER MELHOR

8) (ITA) Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio R=2cm, sabe-se que o lado BC mede 2cm e o ângulo interno ABC mede 30º. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem comprimento, em cm, igual a:

a) $2-\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $2\sqrt{3}-3$ e) $\frac{1}{2}$



Empregando-se a Lei dos Senos para determinar o lado "b":

$$\frac{2}{senA}=\frac{b}{sen30°}=4(dobro\ do\ raio\ da\ circunferência\ excrita)$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{senA}=4 \rightarrow senA=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{sen30°}=4 \rightarrow b=4\cdot sen30° \rightarrow b=2 \end{cases}$$

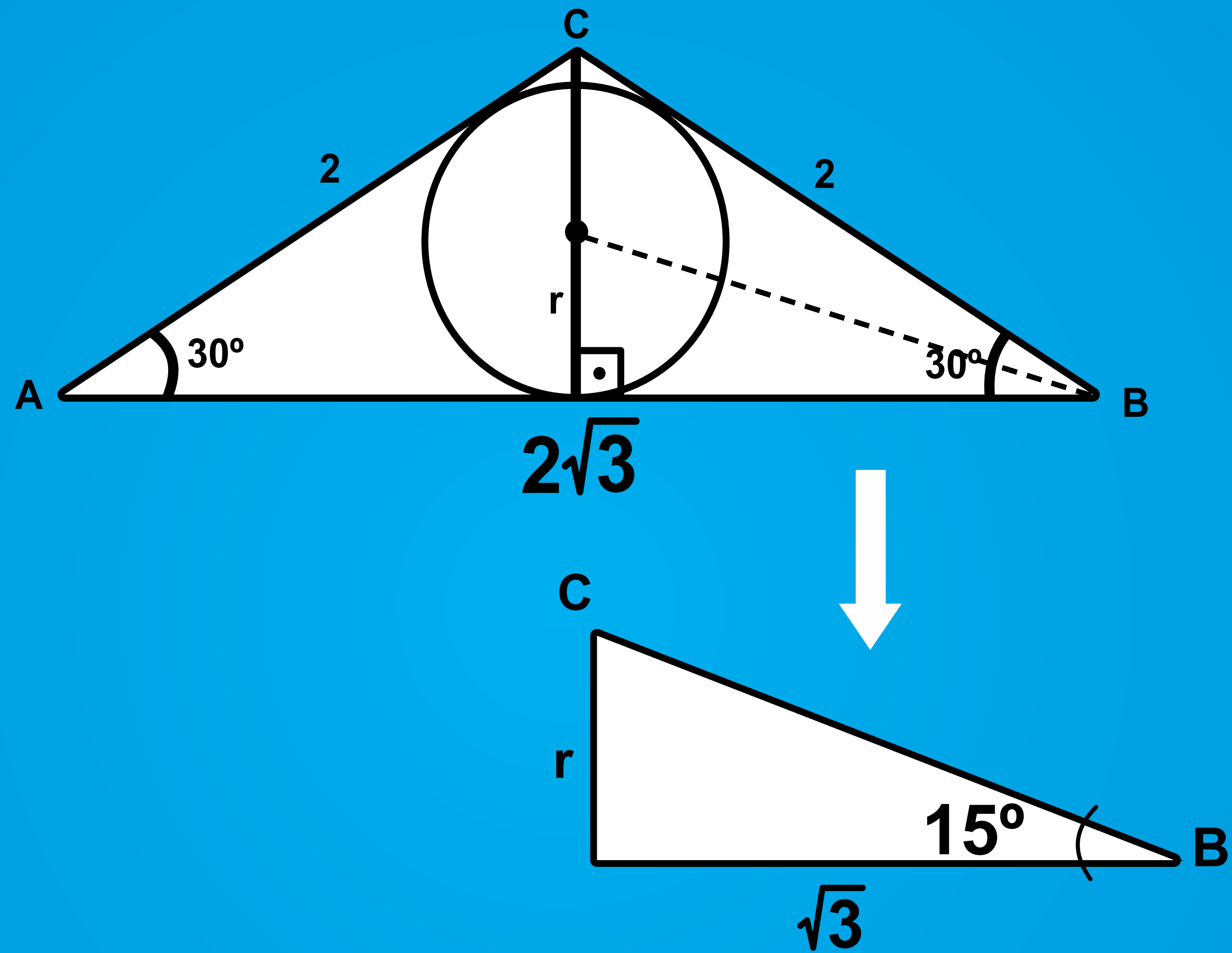
Vê-se que o triângulo ABC é isósceles com base em BA, com ângulo da base igual a 30º.

$$c^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos 120° \rightarrow c^2=4+4-8\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow c^2=12 \rightarrow c=2\sqrt{3}$$

PARA ENTENDER MELHOR

ASSUNTO 2: TRIÂNGULOS

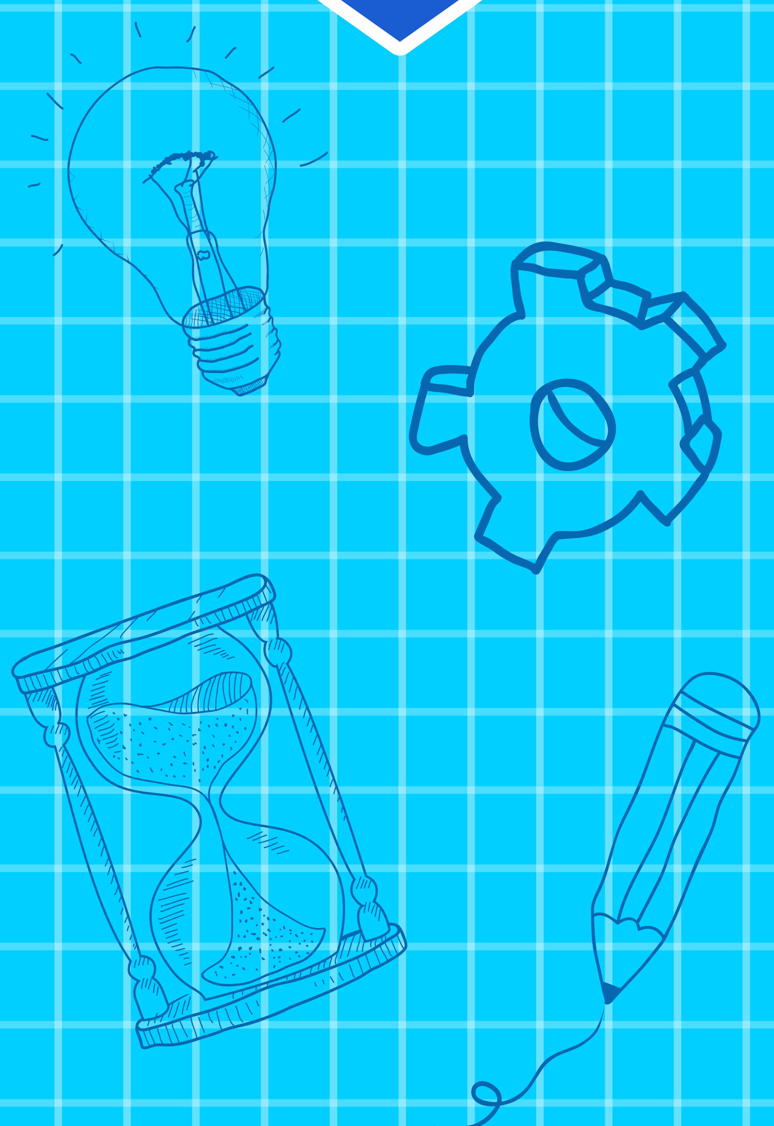
Calculando o raio da circunferência inscrita



$$\underbrace{tg15^\circ = 2-\sqrt{3}}_{(*)} \rightarrow tg15^\circ = \frac{r}{\sqrt{3}} \rightarrow r = \left(2-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3} \rightarrow r = 2\sqrt{3}-3$$

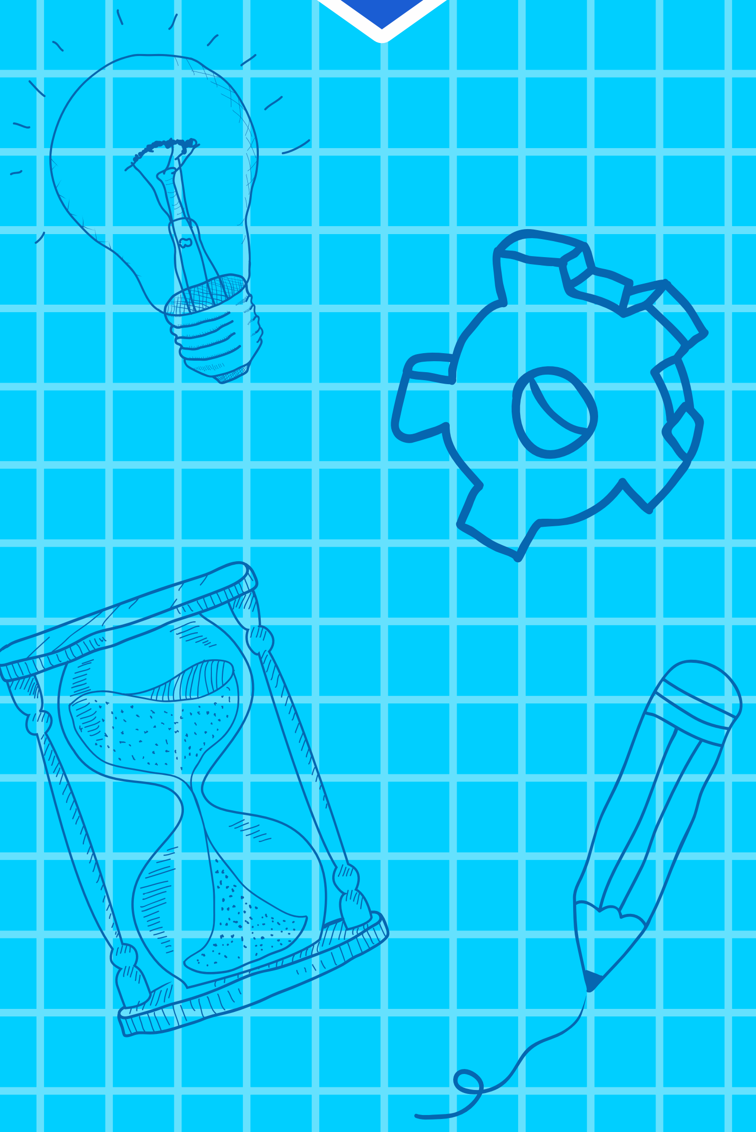
(*) Calcula-se tg15º, bem como demais outros ângulos, por meio de um Bizu que será ensinado em módulo futuro.

RESPOSTA: LETRA a



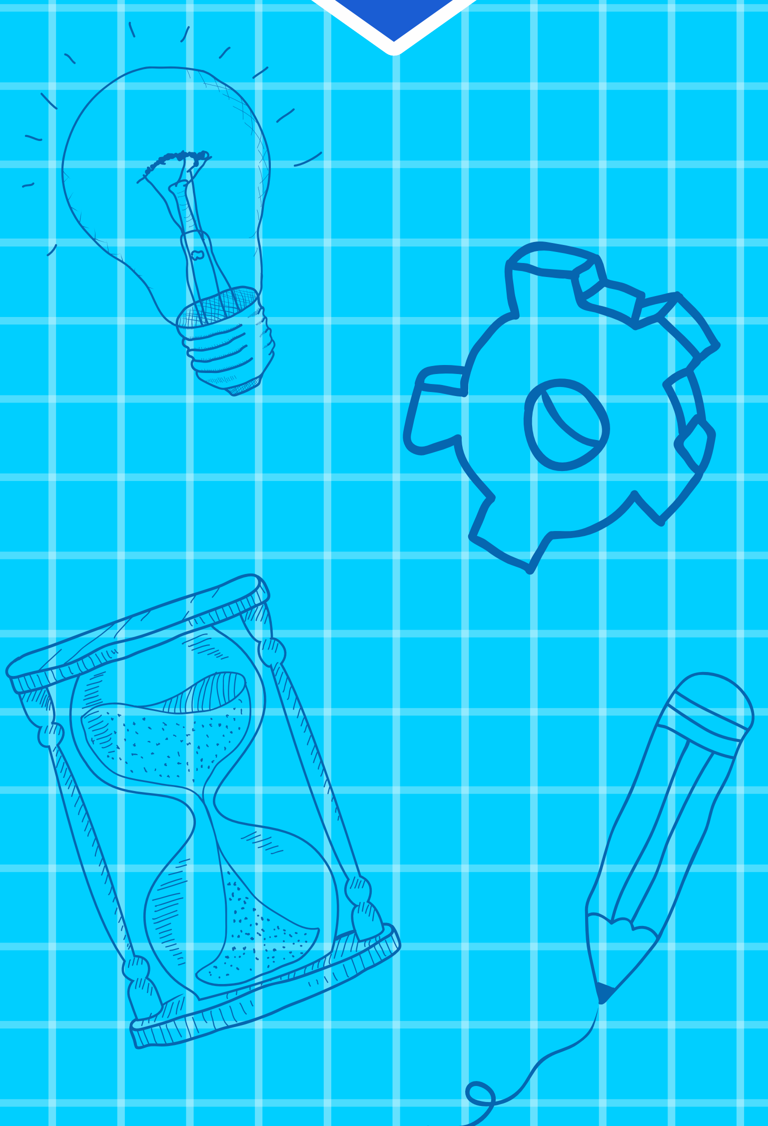
ASSUNTO

3



QUADRILÁTEROS

PARA ENTENDER MELHOR



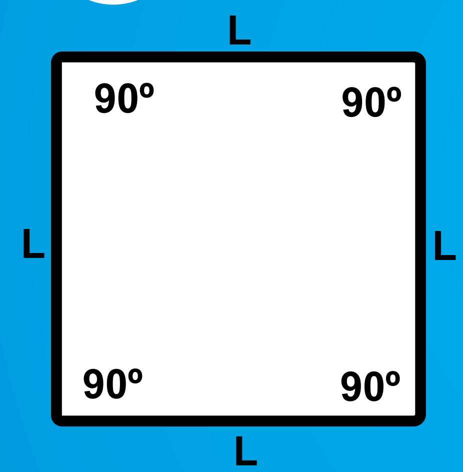
ASSUNTO 3: QUADRILÁTEROS

Os quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados e podem ser classificados como:

1 PARALELOGRAMO

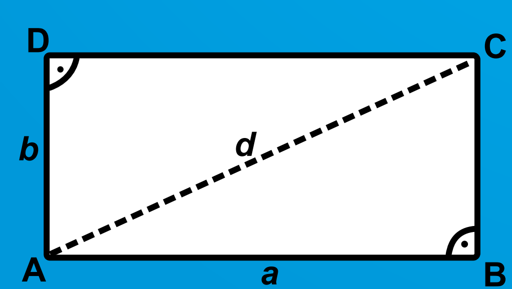
Possuem lados opostos paralelos e podem ser:

a QUADRADO



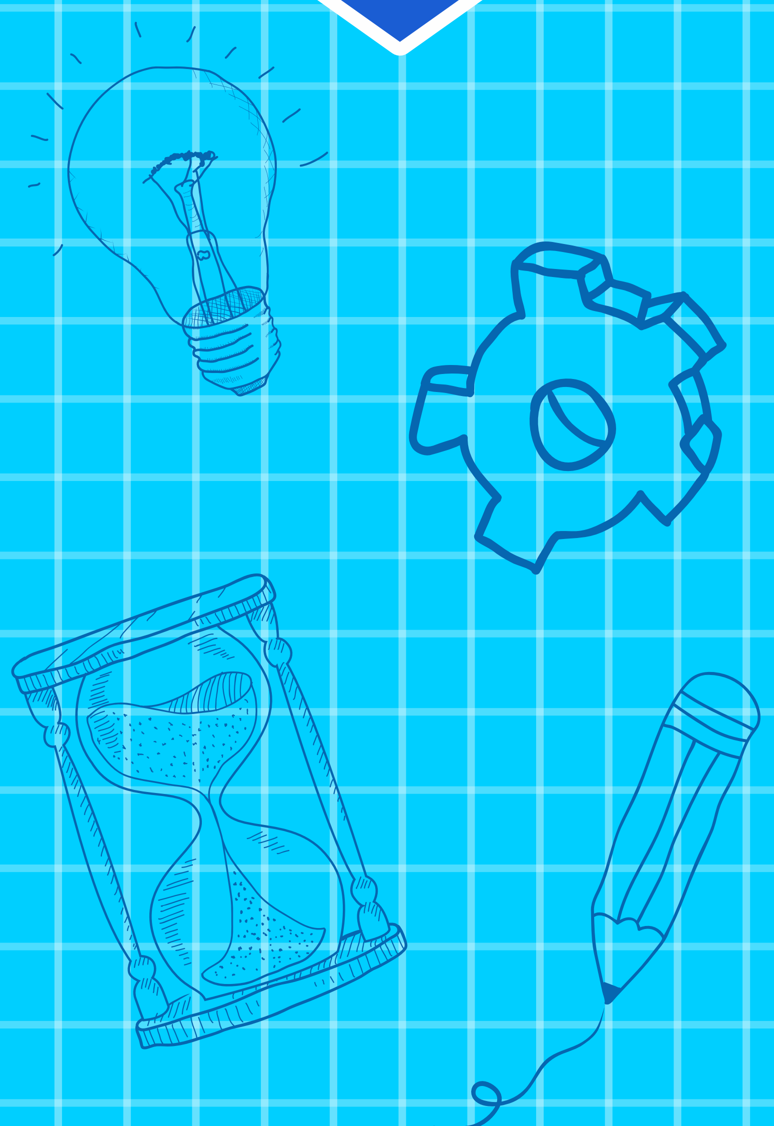
a.1) Suas diagonais internas são iguais e são perpendiculares no ponto médio;
a.2) Todos os ângulos internos são retos;
a.3) Seus lados são iguais
a.4) Pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é igual à sua diagonal

b RETÂNGULO

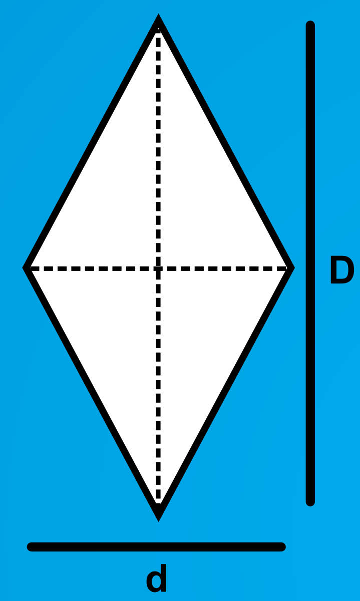


b.1) Suas diagonais são oblíquas e cortam-se ao meio
b.2) Todos os ângulos internos são retos;
b.3) Seus lados opostos são iguais;
b.4) Pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é igual à sua diagonal.

PARA ENTENDER MELHOR

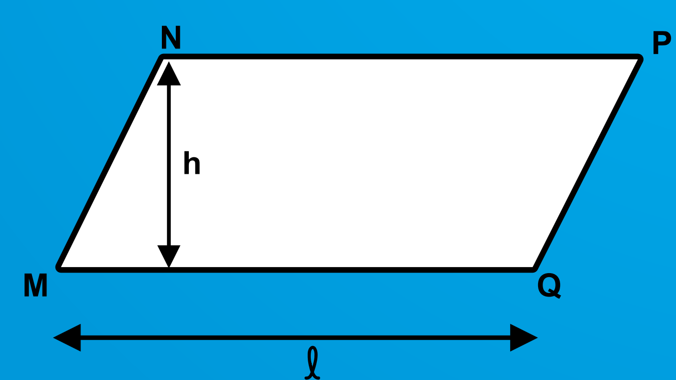


c LOSANGO



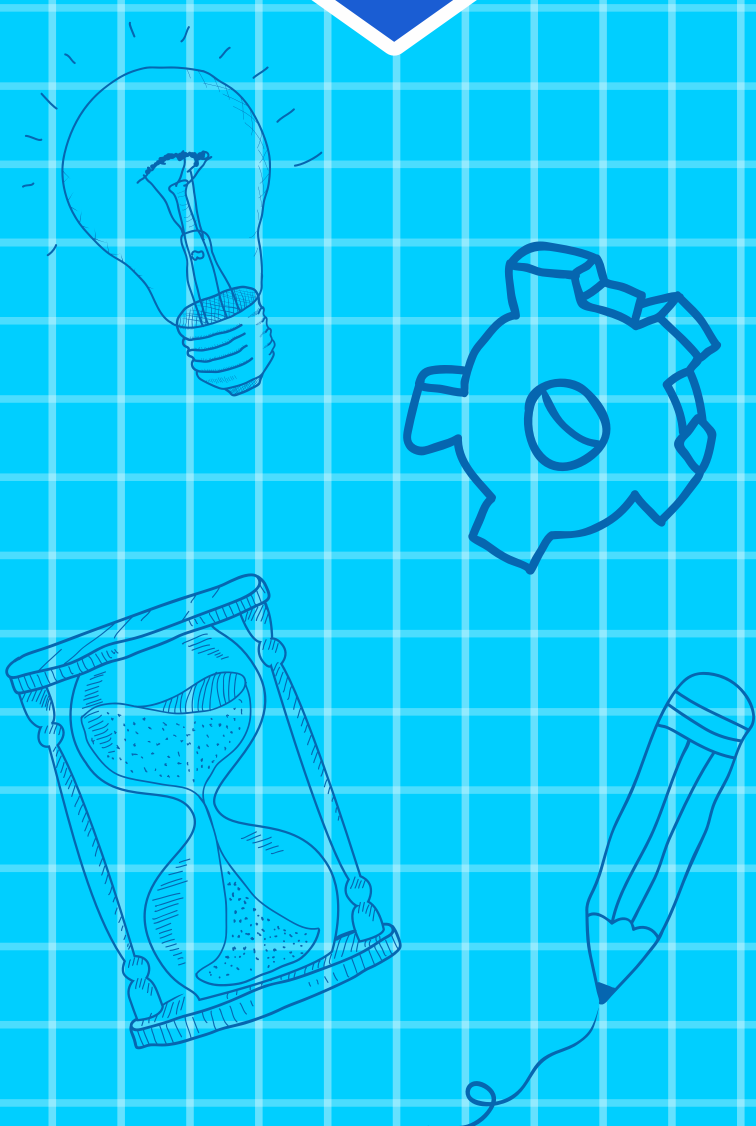
c.1) As diagonais são diferentes, perpendiculares, cortam-se ao meio e são bissetrizes dos ângulos internos;
c.2) Nenhum dos ângulos internos são retos;
c.3) Seus lados são iguais;
c.4) Não é inscritível

d PARALELOGRAMO



d.1) As diagonais são diferentes, oblíquas e cortam-se ao meio;
d.2) Nenhum dos ângulos internos são retos;
d.3) Seus lados opostos são iguais;
d.4) Não é inscritível.

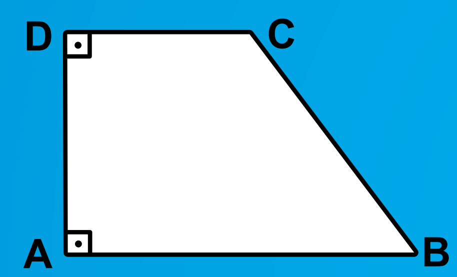
PARA ENTENDER MELHOR



2 TRAPÉZIOS

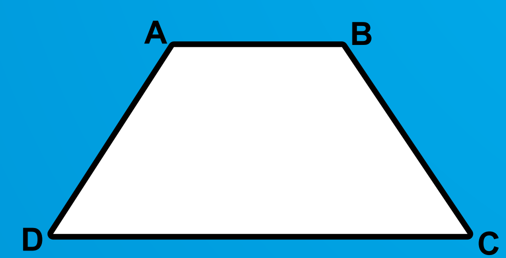
Possuem apenas dois lados paralelos que são chamados Bases e podem ser:

a TRAPÉZIO RETÂNGULO



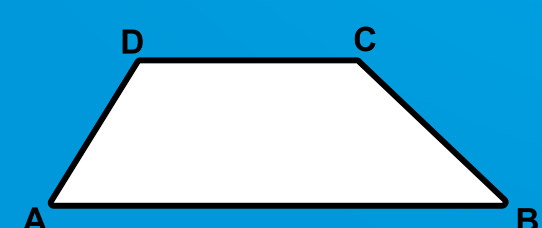
a.1) Apresenta dois ângulos retos;
a.2) Não é inscritível.

b TRAPÉZIO ISÓSCELES



b.1) Os lados opostos não paralelos são congruentes;
b.2) Os ângulos de uma mesma base são congruentes.

c TRAPÉZIO ESCALENO

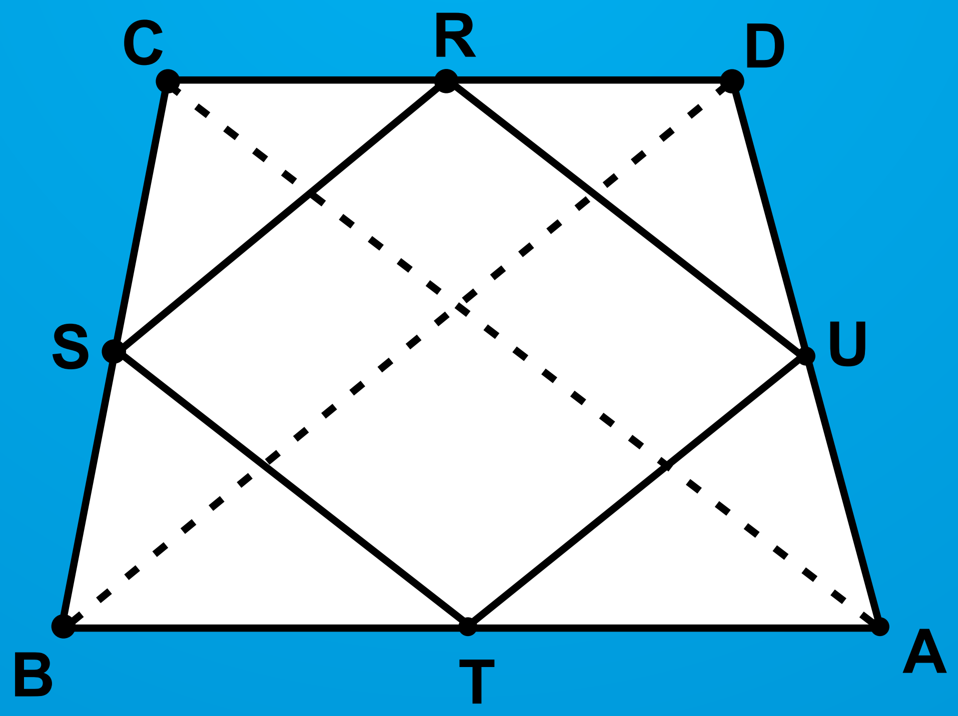


c.1) Os lados opostos não paralelos não são congruentes;

BIZU #3

BIZU IMPORTANTE!

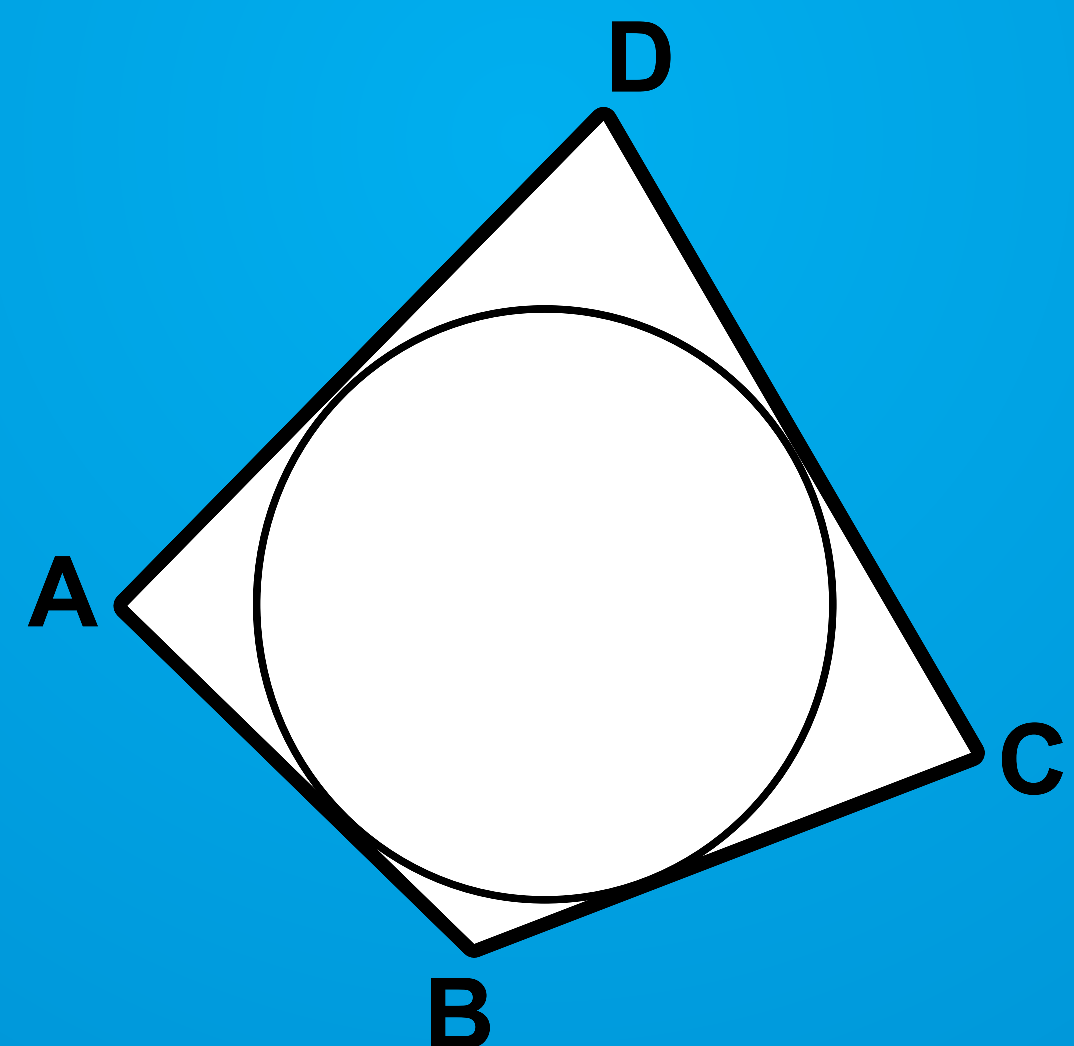
"O quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados ABCD de qualquer quadrilátero é um paralelogramo e o seu perímetro é igual à soma das medidas das diagonais do quadrilátero em que está inserido."



BIZU #4

BIZU IMPORTANTE!

"No quadrilátero circunscritível ABCD a soma dos lados opostos são iguais".

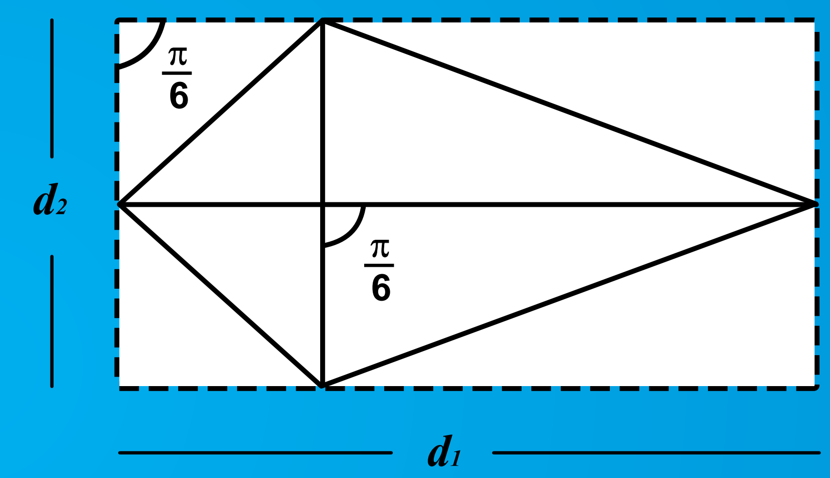


PARA ENTENDER MELHOR

9) (ITA) Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:

a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

Considere um paralelogramo de lados paralelos às diagonais d_1 e d_2 do quadrilátero de área S que contenha seus vértices. Assim, utilizando-se a fórmula da área de um triângulo, em função do seno do ângulo, a área desse paralelogramo será:



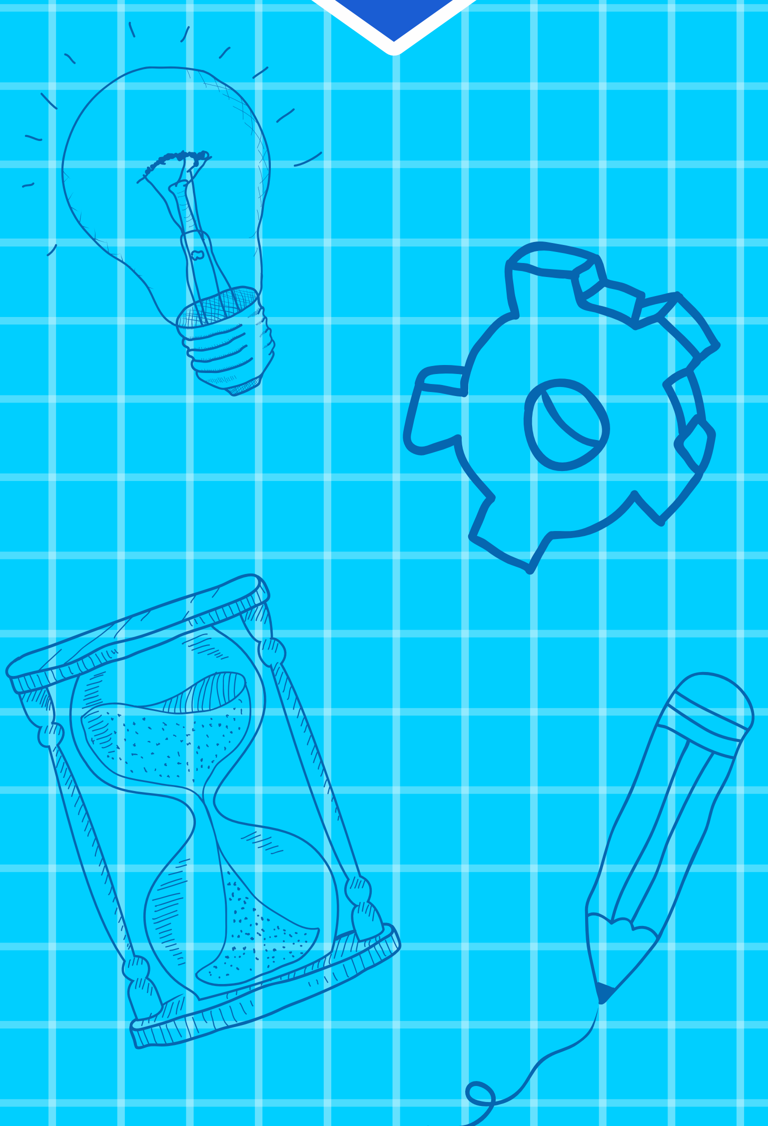
$$d_1 \cdot d_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2S \rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot sen30° = 2S \rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{2} = 2S \rightarrow d_1 \cdot d_2 = 4S$$

RESPOSTA: LETRA d

10) (ITA) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5cm e 6cm. Se R, S, T e U são pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:

a) 22cm b) 5,5cm c) 8,5cm d) 11cm e)13cm

PARA ENTENDER MELHOR



RESOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL

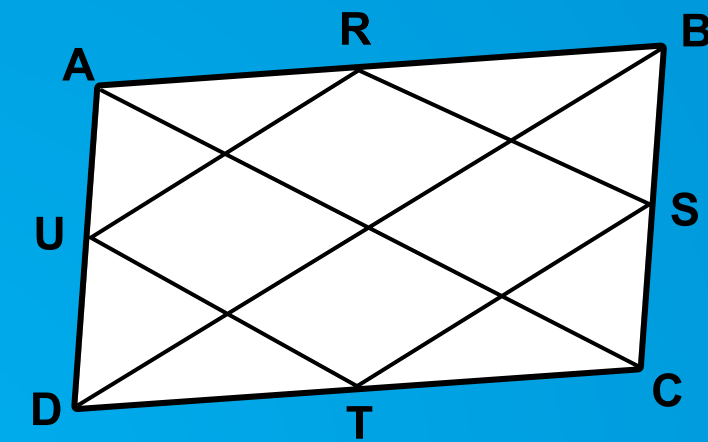
Utilizando o caso LAL de semelhança, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ARU \approx \Delta ABD \\ \dfrac{AR}{AB} = \dfrac{RU}{BD}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{AR}{AB} = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{AR}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BRS \approx \Delta BAC \\ \dfrac{BR}{BA} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\rangle \Rightarrow RS = \frac{1}{2} \rightarrow AC = \frac{5}{2} \rightarrow UT = \frac{5}{2}$$

Assim, o perímetro

$$RSTU = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 11cm$$



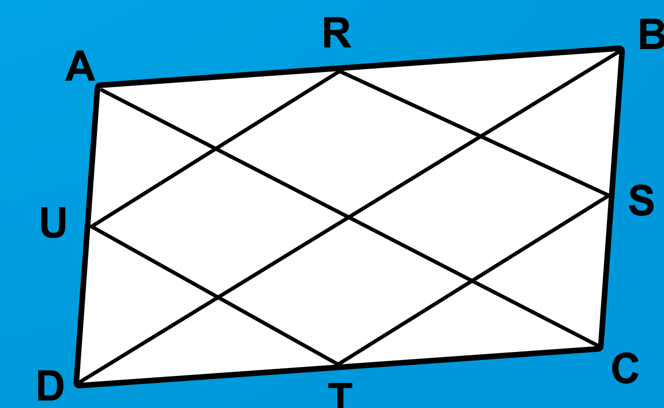
RESPOSTA: LETRA d

RESOLUÇÃO PELO MÉTODO BIZU

"O quadrilátero determinado pelos pontos médios dos lados ABCD de qualquer quadrilátero é um paralelogramo e o seu perímetro é igual à soma das medidas das diagonais do quadrilátero em que está inserido."

Logo,

$$\overline{UR} + \overline{UT} + \overline{RS} + \overline{ST} = \overline{AC} + \overline{BD} = 6 + 5 = 11$$



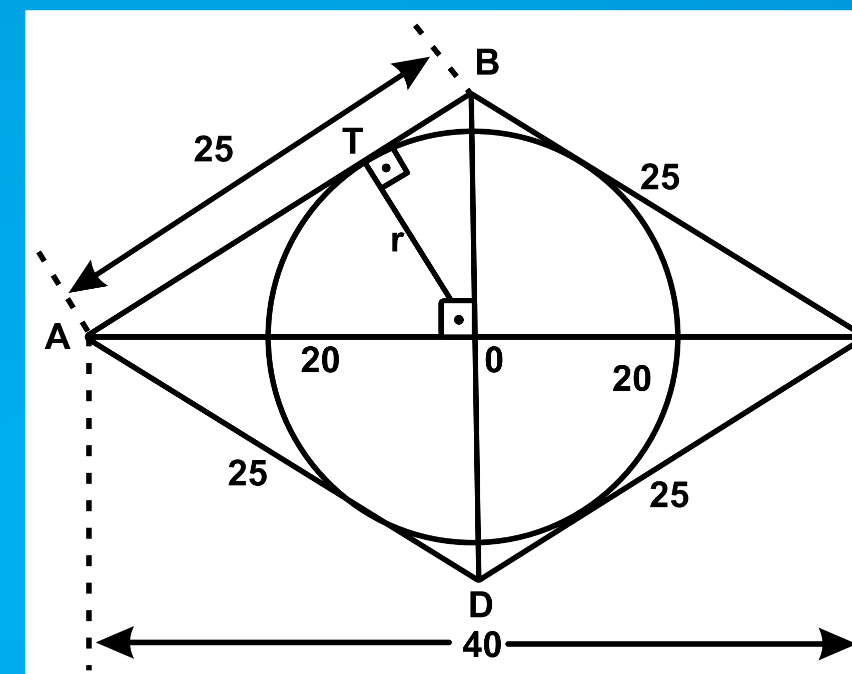
RESPOSTA: LETRA d

PARA ENTENDER MELHOR

11) (ITA) Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100cm e cuja maior diagonal mede 40cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

Temos, no retângulo AOB:

$$[OB]^2 + [OA]^2 = [AB]^2$$
$$[OB]^2 + 20^2 = 25^2$$
$$[OB] = \sqrt{(25+20)\cdot(25-20)}$$
$$[OB] = \sqrt{45\cdot 5} \rightarrow [OB] = 15$$



Ainda no retângulo AOB, temos:

$$[AB]\cdot[OT] = [OB]\cdot[OA]$$
$$25\cdot r = 15\cdot 20 \rightarrow r = 12$$

Área da circunferência inscrita:

$$S = \pi \cdot r^2$$
$$S = \pi \cdot 12^2 \rightarrow S = 144\pi$$

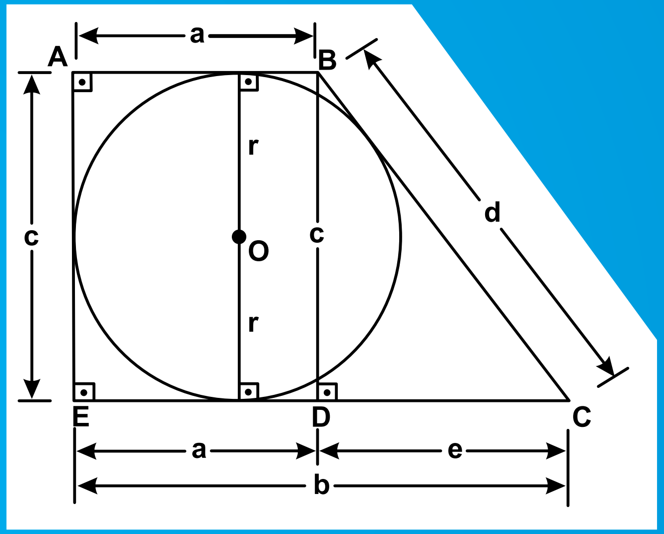
RESPOSTA: $S = 144\pi$

ASSUNTO 3: QUADRILÁTEROS

12) (ITA) Num trapézio circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18cm e a diferença dos outros dois lados é igual a 2cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a+r, em cm, é igual a:

a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

Do enunciado tiramos as seguintes relações: $\begin{cases} a+b=18 \\ d-c=2 \end{cases}$



Como o quadrilátero é circunscritível, podemos usar o seguinte "bizu":

"No quadrilátero circunscritível ABCD a soma dos lados opostos são iguais".

Com isto, temos o seguinte: d + c = 18. Assim, temos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} d+c=18 \\ d-c=2 \end{cases} \rightarrow \underline{d=10} \text{ e } \underline{c=8}$$

e Como $2r=c \Rightarrow 2r=8 \rightarrow \underline{r=4}$

No triângulo retângulo BDC, por Pitágoras, temos:

$$e^2+c^2=d^2$$
$$e^2+8^2=10^2 \rightarrow e=6$$

Como $(b-a)=e \rightarrow b-a=6$

Assim, temos o seguinte sistema: $\begin{cases} a+b=18 \\ d-c=6 \end{cases} \rightarrow \underline{a=6} \text{ e } \underline{b=12}$

Assim, a soma $a+r=6+4=10$

RESPOSTA: LETRA C

ASSUNTO 3: QUADRILÁTEROS

13) (ITA) Num triângulo ABC retângulo em A, seja D a projeção de A sobre BC. Sabendo-se que o segmento BD mede 1cm e que o ângulo DÂC mede θ graus, então a área do triângulo ABC vale:

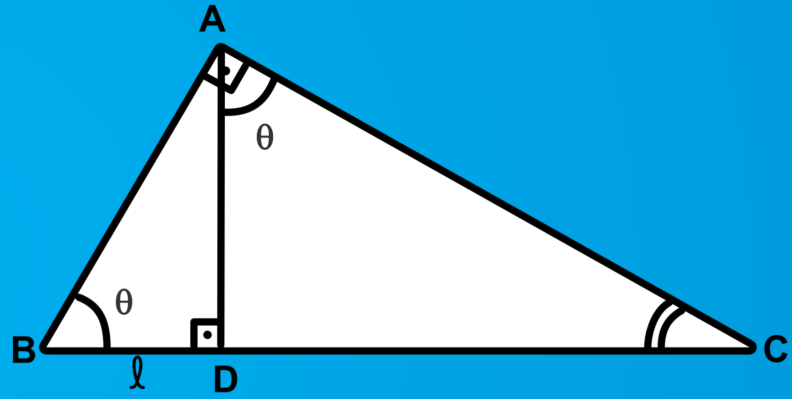
a) $\frac{L^2}{2}\cdot\sec\theta\cdot tg\theta$

c) $\frac{L^2}{2}\cdot\sec\theta\cdot tg^2\theta$

c) $\frac{L^2}{2}\cdot\cos\sec^2\theta\cdot\cot g\theta$

b) $\frac{L^2}{2}\cdot\sec^2\theta\cdot tg\theta$

d) $\frac{L^2}{2}\cdot\cos\sec\theta\cdot\cot g\theta$



Consideremos o triângulo da figura ao lado. Temos:

I) $A\hat{B}C = D\hat{A}C = \theta$

II) $\Delta ADB \to \cos\theta = \frac{L}{\overline{AB}} \to \overline{AB} = \frac{L}{\cos\theta}$

III) $\Delta ABC \to \overline{BC}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}^2 \to \overline{BC}\cdot L = L^2\cdot\sec^2\theta \to BC = L\cdot\sec^2\theta$

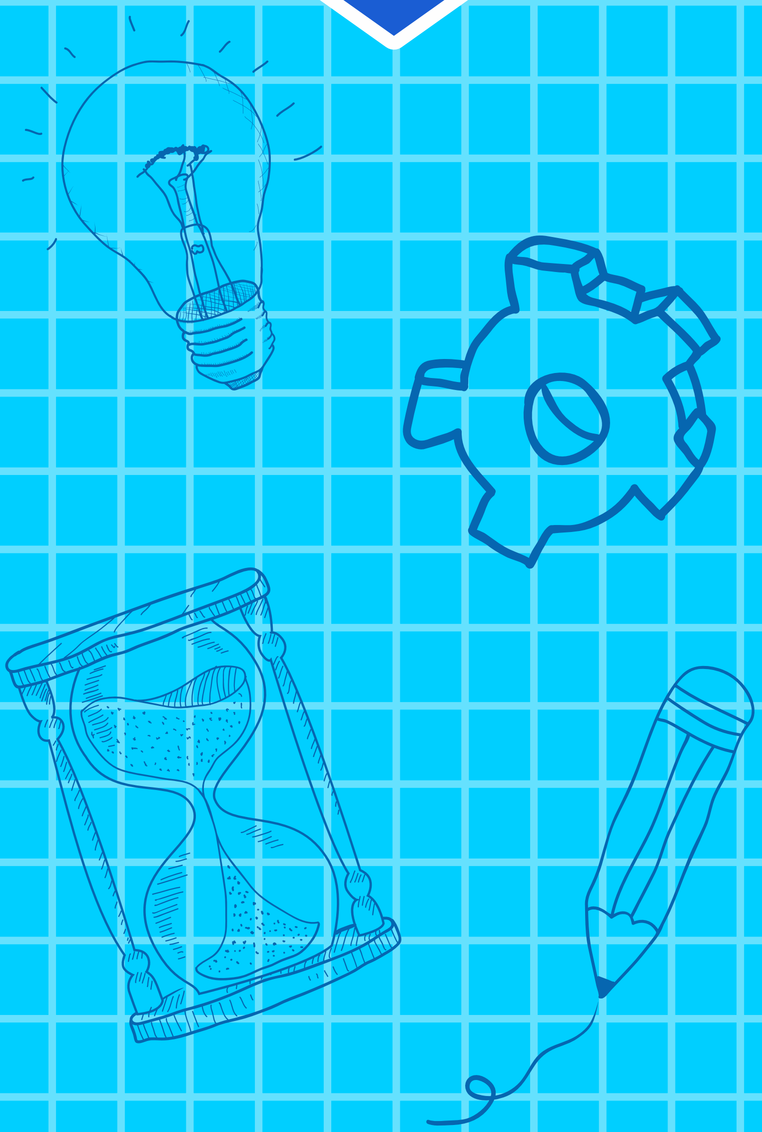
IV) Área pedida no problema

$$A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot sen\theta \to A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{\cos\theta}\right)\cdot\left(L\cdot\sec^2\theta\right)\cdot sen\theta \to A = \frac{L^2}{2}\cdot\sec^2\theta\cdot tg\theta$$

RESPOSTA: LETRA b

ASSUNTO

4



BIZUS INTERESSANTES

BIZU #5

Método prático para elevar qualquer número ao quadrado

Observe como elevar o número 32 ao quadrado

$32^2 \longrightarrow 3 \quad 2 \quad ^2$

1 Elevar cada número ao quadrado $\longrightarrow 3^2 \; 2^2$

2 Colocar os resultados abaixo $\longrightarrow 09\,04$

3 Multiplicar todos os algarismos $\longrightarrow 32^{2} \longrightarrow 3 \times 2 \times 2 \longrightarrow 12 \quad +$

4 Realizar a soma $\longrightarrow 01024$

RESPOSTA: $32^2 = 1024$

EXEMPLO:

elevar ao quadrado o número 1327

PASSO 1: $1327^2 = 13^2 \ldots 27^2 = 169 \ldots 729 = 169 \ldots 0729 = 1690729$

PASSO 2: $13 \times 27 \times 2 \ldots 00 = 702 \ldots 0 = 702\underline{00}$

PASSO 3: $1690729 + 70200 = 1760929$

RESPOSTA: $1327^2 = 1760929$

BIZU #6

Quando a Geometria Plana encontra a Analítica

Uma das grandes vantagens da Matemática é que os recursos são totalmente intercambiáveis.

Neste Bizu veremos como podemos resolver uma questão de Geometria analítica muito mais facilmente se utilizarmos conhecimentos básicos de Geometria plana.

Observe a questão abaixo:

14) No plano cartesiano, a reta que passa pelos pontos $A = (4,3)$ e $B = (6,4)$ corta os eixos nos pontos P e Q. O comprimento do segmento PQ é:

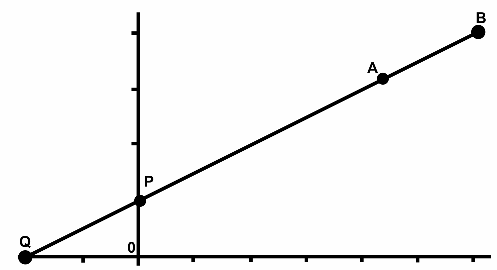
a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{5}$ e) 2

Supondo que os pontos P e Q pertençam, respectivamente, aos eixos y e x, suas coordenadas cartesianas serão da forma $P = (0,y)$ e $Q = (x,0)$. Basta determinar os valores de x e de y.

Estes valores poderão ser encontrados a partir da função AFIM cujo gráfico passa por A e por B, ou seja, $f(x) = ax + b$, onde $f(4) = 3$ e $f(6) = 4$. Assim, teremos:

BIZU #6

$$\begin{cases} f(4) = 4a + b \rightarrow 4a + b = 3 \\ f(6) = 6a + b \rightarrow 6a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Resolvendo o Sistema tem-se: } \begin{cases} 4a + b = 3 \\ 6a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 1$$



ASSIM, TEMOS:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow P(0,1) \\ f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 0 \rightarrow x = -2 \Rightarrow Q(-2,0) \end{cases}$$

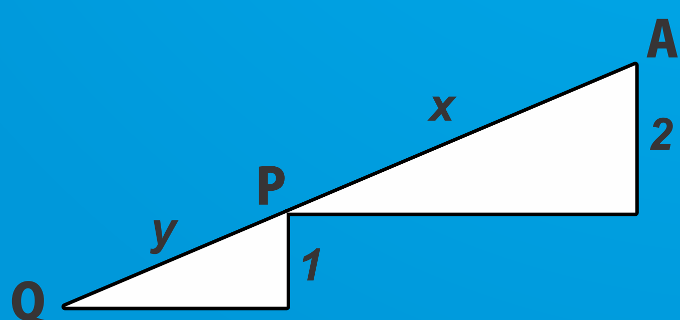
Como se deseja saber o comprimento do segmento PQ, pode-se utilizar a fórmula da distância entre dois pontos:

$$d(P,Q) = \sqrt{(Px - Qx)^2 + (Py - Qy)^2} = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

RESPOSTA: LETRA d

BIZU!

Podemos identificar na figura dois triângulos semelhantes. A partir daí, basta fazer os cálculos respectivos:

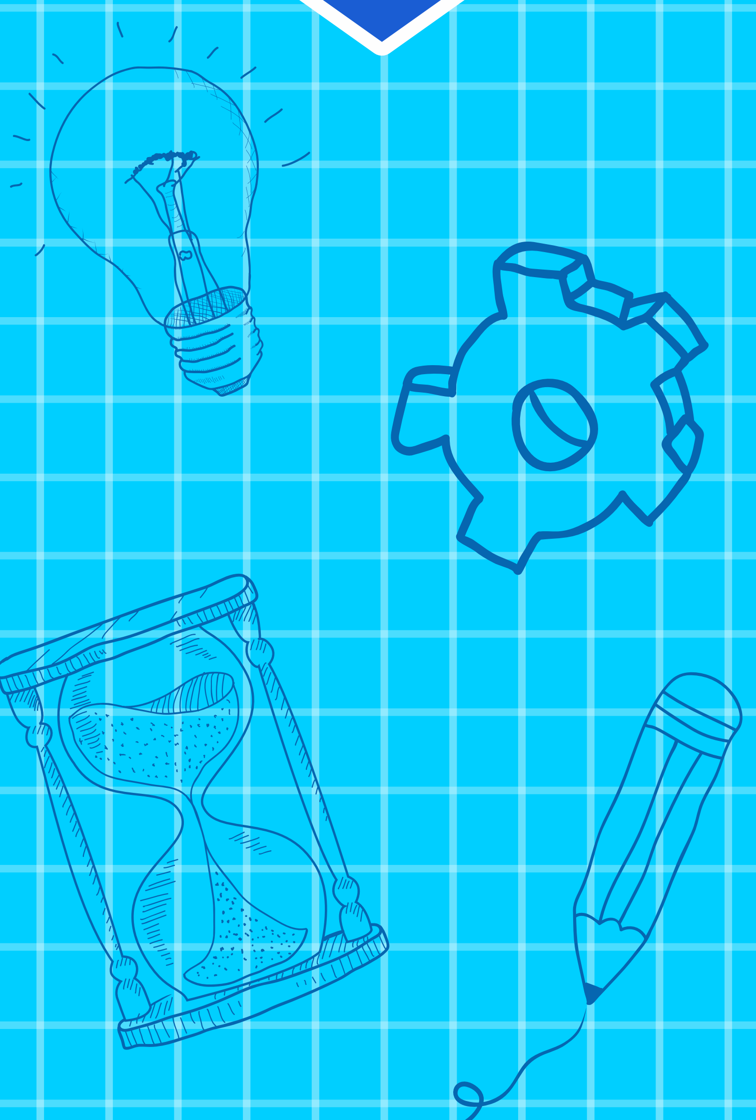


$$x^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow x^2 = 20 \rightarrow x = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{y} = 2 \rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{2} \rightarrow y = \sqrt{5}$$

RESPOSTA: LETRA d

BIZU
#7



Operando com Radicais Duplos

Certas operações algébricas nos parecem não ter nem por onde iniciar. Um exemplo delas é a operação com Radicais Duplos.

É sabido pela maioria das pessoas que $\sqrt[a]{b^c} = b^{\frac{c}{b}}$. Porém, esta propriedade não é, por si só, suficiente para se operar com, por exemplo, o seguinte radical duplo: $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Sendo assim, vou reapresentá-los a um processo simples que nos permite trabalhar com este tipo de radical.

Cálculo de $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, onde B é um múltiplo de 4

Passo 1: Dividir o número B por 4. Digamos que o resultado seja o número C.

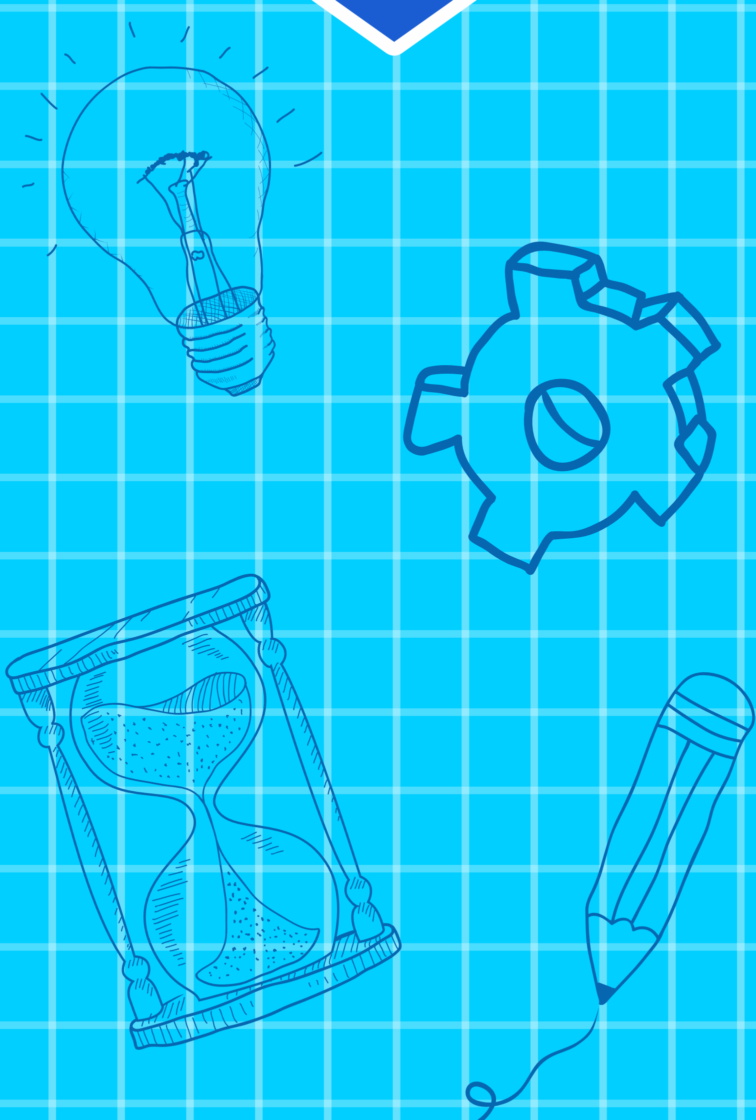
Passo 2: Encontrar dois números que, somados resultem em A e multiplicados resultem em C. Digamos que estes números sejam D e E.

Passo 3: Construir a seguinte estrutura com os números encontrados no Passo 3:

$\boxed{\sqrt{D} \pm \sqrt{E}}$ Este será o resultado procurado.

Assim, teremos nesta situação em particular: $\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \rightarrow \sqrt{D} \pm \sqrt{E}}$

BIZU #7



Vamos acompanhar o seguinte exemplo:

15) Transforme o radical duplo $\sqrt{8+\sqrt{60}}$ em uma soma de dois radicais.

Resolução:

- ***Passo 1:*** $\dfrac{60}{4}=15$
- ***Passo 2:*** $\left\{\begin{matrix} D+E=8 \\ D\times E=15 \end{matrix}\right\rangle D=3, E=5$
- ***Passo 3:*** $\sqrt{D}+\sqrt{E}\rightarrow\sqrt{3}+\sqrt{5}$

RESPOSTA:

$$\sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Cálculo de $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, onde B <u>não é</u> um múltiplo de 4

Passo 1: Multiplicar os números A e B por 4. Digamos que os resultados sejam, respectivamente, os números C e D.

Passo 2: Encontrar dois números que, somados resultem em C e multiplicados resultem em D. Digamos que estes números sejam E e F.

Passo 3: Construir a seguinte estrutura com os números encontrados no Passo 3:

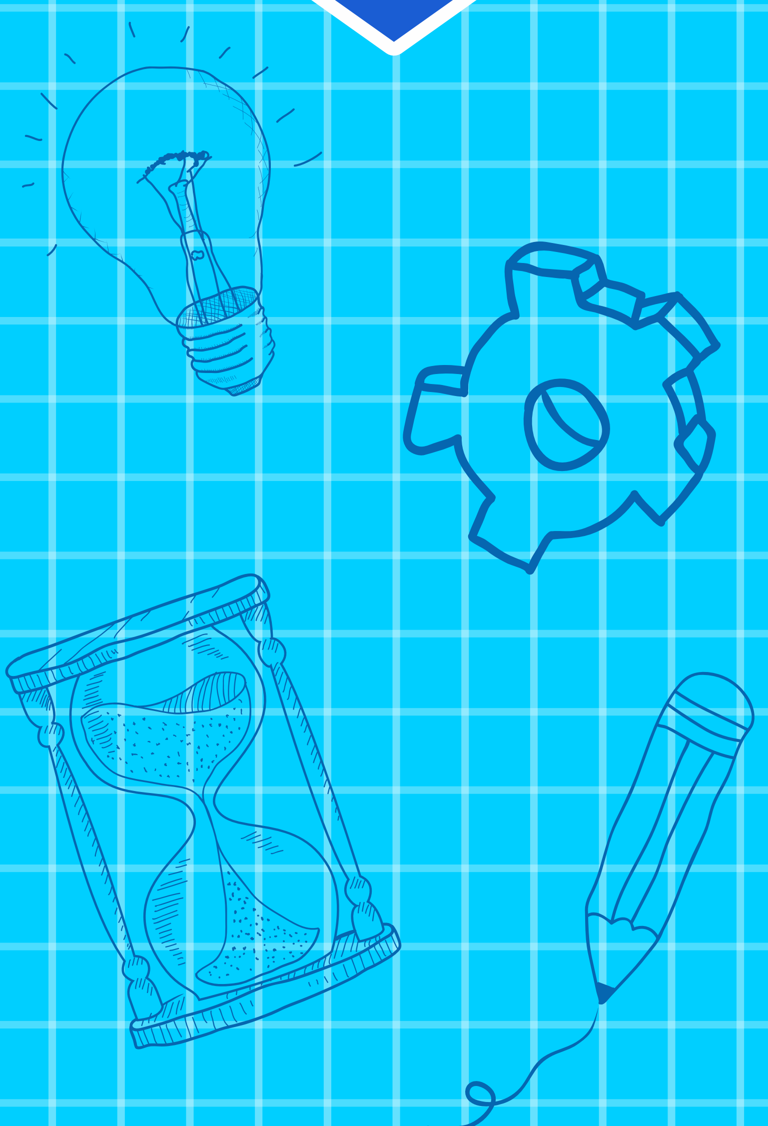
$$\frac{\sqrt{E}\pm\sqrt{F}}{2}$$

Este será o resultado procurado.

Assim, teremos nesta situação em particular:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\rightarrow\frac{\sqrt{E}\pm\sqrt{F}}{2}$$

BIZU #8



Probabilidade com Moedas

O emprego da moeda é uma das maneiras mais triviais para compreender a conceituação básica da Teoria da Probabilidade.

Isto ocorre porque a moeda possui apenas duas faces e, consequentemente, a compreensão intuitiva da probabilidade de ocorrência aleatória de uma face em um lançamento é muito simples e imediata.

Mas, apesar de que possa ser simples esta interpretação, nem todos os eventos que utilizam moedas podem ser considerados triviais.

Para obtermos "A" caras e "B" coroas em "X" lançamentos podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$P=\frac{C_{X,A}}{2^X}\ \text{ou}\ P=\frac{C_{X,B}}{2^X}$$

16) Calcule o número de possibilidades de se obter duas caras e uma coroa em três lançamentos de uma moeda não-viciada. (o vício na moeda significa possuir uma das faces com condições diferentes da outra, de modo que esta diferença influencie na chance de ocorrência de um determinado resultado.

Considerando $(A=cara)$ *e* $(B=coroa)$, *teremos:*

$$P=\frac{C_{3,2}}{2^3}\rightarrow P=\frac{\binom{3}{2}}{8}\rightarrow P=\frac{\left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)}{8}=\frac{\frac{3\times2\times1}{2\times1}}{8}=\frac{3}{8}$$

RESPOSTA: A chance de se obter 2 caras e 1 coroa em 3 lançamentos é de 3/8.

BIZU #8

Probabilidade com Moedas

17) (IME 2012) Um menino, na cidade do Rio de Janeiro, lança uma moeda. Ele andará 1m para leste se o resultado for cara ou 1m para oeste se o resultado for coroa. A probabilidade de este menino estar a 5m de distância de sua posição inicial, após 9 lançamentos da moeda, é:

a) $\dfrac{9}{2^6}$ b) $\dfrac{35}{2^6}$ c) $\dfrac{2}{9!}$ d) $\dfrac{35}{2^9}$ e) $\dfrac{9!}{2^9}$

RESOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL

Se chamarmos de “L” os passos dados a Leste e de “O” os passos dados a Oeste, poderemos concluir que teremos combinações conforme o seguinte exemplo:

1. LLLLLLOOO = Significa que foram dados 6 passos para Leste e 3 passos para Oeste, ficando a 3 passos da posição inicial.

2. OOOLLLOOO = Significa que foram dados 3 passos para Oeste, 3 para Leste e 3 para Oeste, significando 3 passos da posição inicial.

BIZU #8

Probabilidade com Moedas

Para que o menino termine a 5m de distância de sua posição inicial após 9 lançamentos da moeda, a sequência deverá ser do tipo 7 passos para Leste e 2 para Oeste ou 7 passos para Oeste e dois ara Leste, ou seja, (LLLLLLLOO) ou (OOOOOOOLL) ou (LLLLOOLLL), (LOOOOLOOO), etc. Desta maneira, devemos encontrar a probabilidade de que ocorra 7 "L^S" e 2 "O^S" ou 7 "O^S" e 2 "L^S".

$$7\text{ “}L^s\text{” e } 2\text{ “}O^s\text{”: } N=\frac{9!}{7!(9-7)!}=\frac{9\times8\times7!}{7!\times2!}=36 \text{ possibilidades em } 2^9 \text{ possíveis.}$$

$$2\text{ “}L^s\text{”: } N=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9\times8\times7!}{2\times7!}=36 \text{ possibilidades em } 2^9 \text{ possíveis.}$$

A Probabilidade procurada será dada por:

$$\frac{36}{2^9}+\frac{36}{2^9}=\frac{36+36}{2^9}=\frac{72}{2^9}=\frac{2^3\times3^2}{2^9}=\frac{9}{2^6}$$

RESPOSTA: LETRA a

BIZU! De acordo com o enunciado, queremos encontrar a Probabilidade de que, em 9 lançamentos da moeda, o menino realize 7 passos para Leste e 2 para Oeste ou 7 passos para Oeste e 2 para Leste. Assim, teremos:

$$P=\frac{C_{X,A}}{2^X}\rightarrow P=\frac{C_{9,2}}{2^9}=\frac{\frac{9!}{2!}}{2^9}=\frac{\frac{9\times8}{2}}{2^9}=\frac{36}{2^9}=\frac{9}{2^7}$$

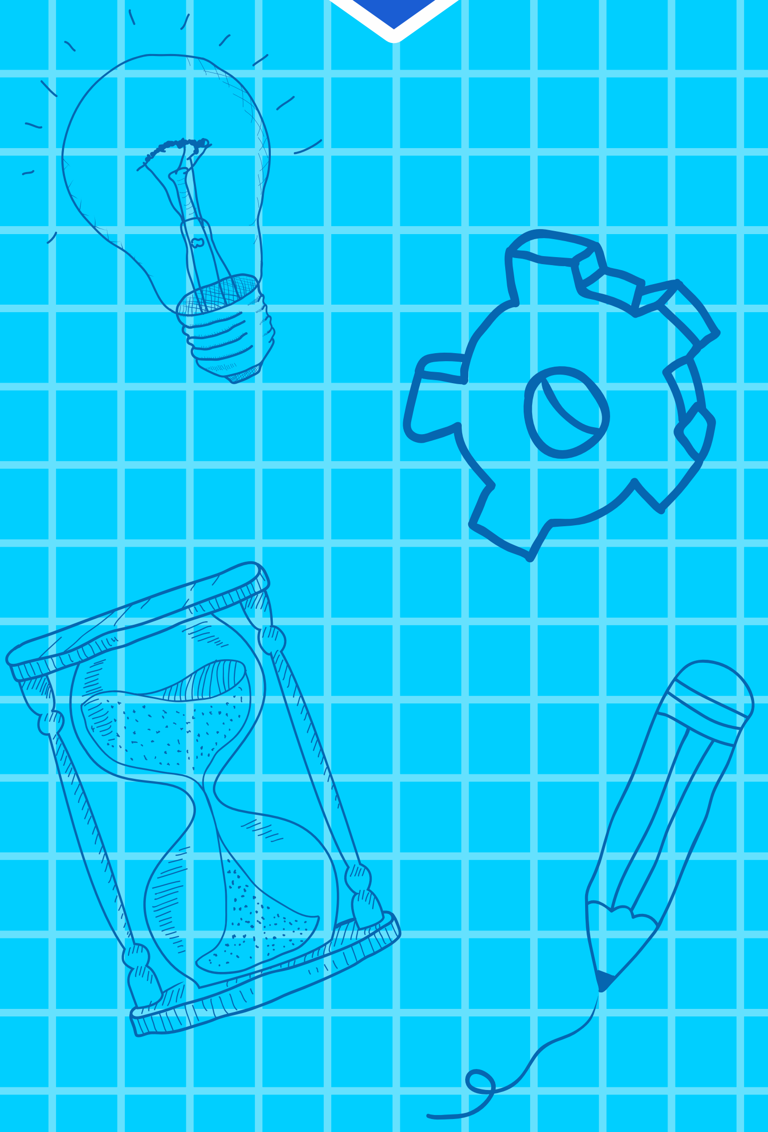
$$P_{total}=2\times\frac{9}{2^7}=\frac{9}{2^6}$$

Como são duas situações iguais, basta multiplicar o resultado acima por 2

RESPOSTA: LETRA a

ASSUNTO

5



EQUAÇÕES DO 2º GRAU

BIZU #9

ASSUNTO 5: EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Quando aprendemos a calcular as raízes de uma equação do 2º grau, aprendemos um procedimento que muitos conhecem como "Processo de Obtenção das Raízes por Soma e Produto", onde, em $ax^2 + bx + c = 0$, o produto das raízes vale (c/a) e a soma delas vale $(-b/a)$.

Quando as raízes são números inteiros este processo é bem simples de ser calculado. O problema maior é quando uma ou mais raízes não são inteiras. Nesta situação, encontrá-las por este método pode ser complicado e fica mais fácil utilizando a Fórmula de Báskhara.

Neste capítulo, vamos aprender a calcular as raízes por "Soma e Produto", para quaisquer tipos de raízes.

Considere a seguinte equação do 2º Grau: $2x^2 - x - 3 = 0$. Se utilizarmos Báskhara encontraremos as raízes da seguinte maneira:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$x' = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1-5}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Se fôssemos determinar estas raízes pelo método da soma e do produto teríamos um grande trabalho. Observe:

Considerando x' e x" as raízes procuradas, pelo Método da Soma e do Produto teríamos:

- *Soma:* $x' + x'' = \left(\frac{-b}{a}\right) = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$
- *Produto:* $x' \cdot x'' = \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{-3}{2}$

BIZU #9

Cálculo Rápido das Raízes

Como já calculamos por Báskhara as raízes desta equação, sabemos que as raízes são: $x' = \frac{3}{2}$ e $x'' = -1$. De fato são exatamente estas. Se quiséssemos verificar poderíamos fazer as operações e comprovar os resultados:

- *Soma:* $x' + x'' = \frac{3}{2} + (-1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$
- *Produto:* $x' \cdot x'' = \frac{3}{2} \times (-1) = -\frac{3}{2}$

Vamos considerar a mesma equação do exemplo anterior:

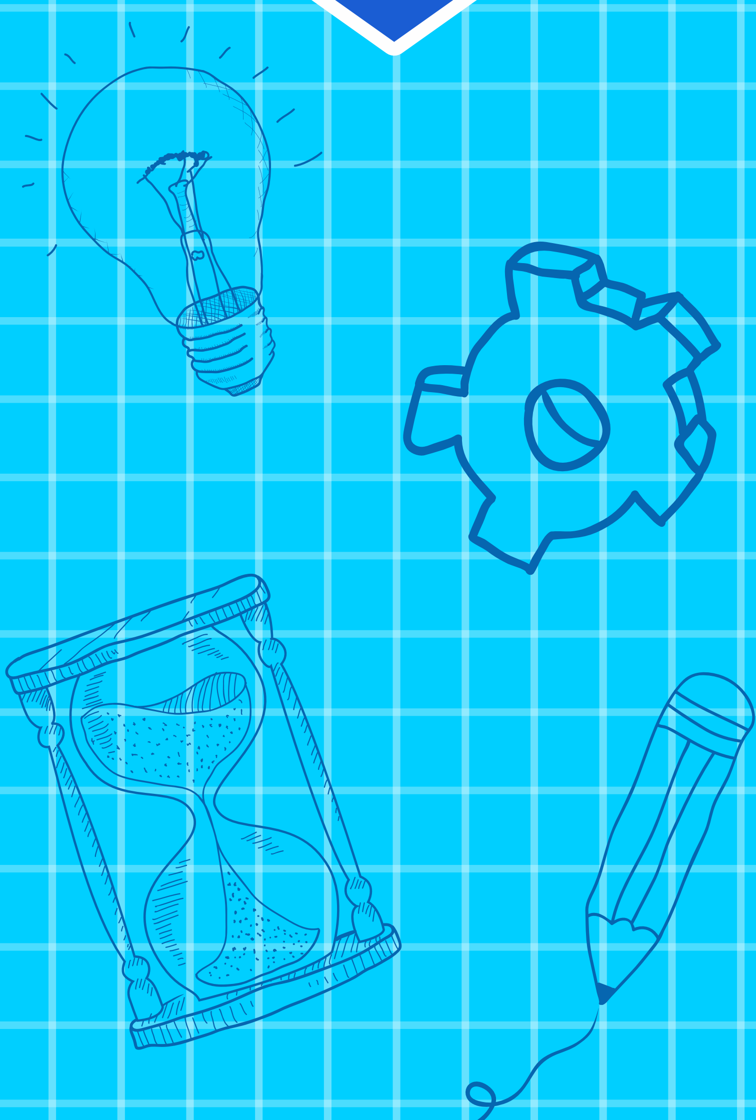
Determinar as raízes da equação $2x^2 - x - 3 = 0$

Resolução:

Passo 1: Multiplicar, na equação, os coeficientes a e c:

$$P = 2 \times (-3) = -6$$

BIZU #9



Cálculo Rápido das Raízes

Passo 2: Verificar dois números que, multiplicados, forneçam resultado igual ao valor encontrado no Passo 1 e, somados, resultem no valor simétrico de b.

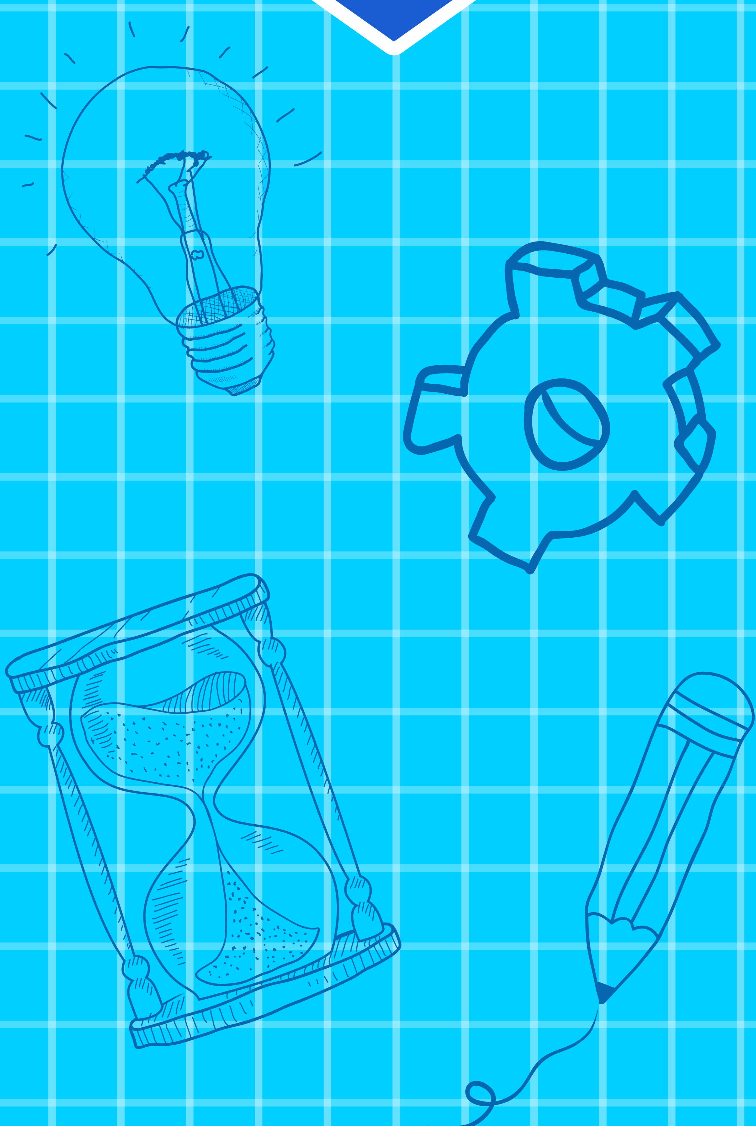
-6	6	-3	3
+1	+ -1	+2	+ -2
-5	5	-1	1

Destas quatro possibilidades, a única que satisfaz às exigências de Soma e Produto é a quarta, ou seja, 3 e -2.

Passo 3: Dividir os dois valores encontrados pelo resultado pelo coeficiente a.

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \div 2 = \dfrac{3}{2} \\ x'' = (-2) \div 2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases} \Bigg\rangle \rightarrow \begin{cases} x' = \left(\dfrac{3}{2}\right) \\ x'' = -1 \end{cases}$$

BIZU
#10



Máximos e Mínimos

Toda equação do grau é da forma $ax^2 + bx + c = 0$. A teoria ensina que o vértice da parábola descrita por uma equação particular possui os valores de x e y obtidos por meio das seguintes relações:

- *x do vértice:* $x_v = \frac{-b}{2a}$
- *y do vértice:* $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Porém, o valor de x que torna a equação do 2º grau máxima localiza-se, exatamente, no local onde o eixo de simetria do gráfico da função intercepta o eixo das abscissas. Este será o x do vértice.

Observe ainda que o eixo de simetria divide a parábola ao meio e o local onde ele intercepta x é equidistante às raízes desta equação.

Como o local que o eixo de simetria intercepta x no ponto médio do segmento determinado pelas raízes da equação, podemos dizer que este "xm" situa-se na seguinte posição:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

A conclusão que se chega é que este "xm" é a mesma coordenada em x do ponto máximo ou mínimo da parábola.

Muitas questões podem ser resolvidas facilmente se conhecermos este recurso que podemos definir como:

"A coordenada do 'x' do vértice é a média aritmética das raízes da equação".

Máximos e Mínimos

18) (AFA) Considere a função quadrática f: A $\to$ B de raízes x1 = 1 ou x2 = 3, cujas coordenadas do vértice são iguais. Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$ e f é uma função crescente $\forall x \in [p, q]$, então (q - p) é igual a:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4

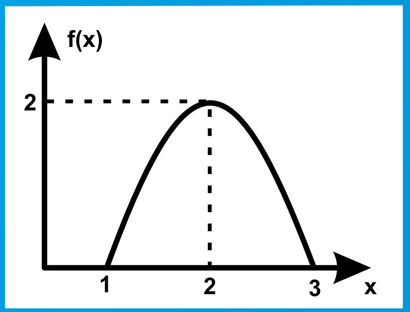
Resolução:

Como se trata de uma função quadrática, cujas raízes são 1 e 3, podemos escrevê-la da seguinte maneira: f(x) = a(x-1)(x - 3), o que nos fornece f(x) $ax^2 - 4ax + 3a$. Sabendo-se que seu gráfico é uma parábola, as coordenadas do vértice tem, por exemplo, **x** valendo o seguinte:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4a)}{2(a)} = \frac{4a}{2a} = 2$$

Como, segundo o enunciado, as coordenadas do vértice são iguais, o y do vértice também vale 2.

Vendo, ainda, que a função possui gráfico sempre positivo, sua parábola possui ponto de máximo. Assim, tem-se o seguinte gráfico:

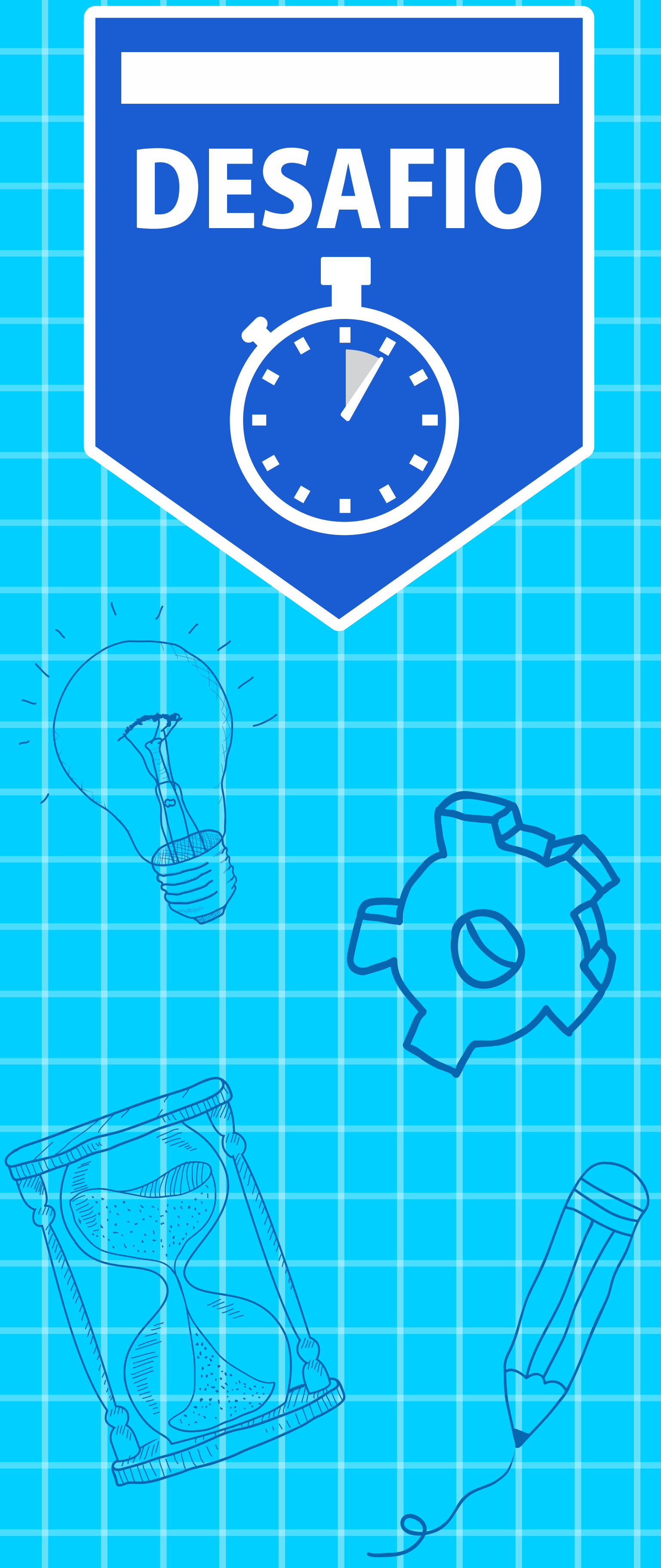


Vemos, então, que a parábola é crescente no intervalo [1,2]. Logo, (p - q) = (2-1) = 1

RESPOSTA: LETRA a

DESAFIO

DESAFIOS - BIZU



DESAFIOS - BIZU

Vou propor agora um pequeno desafio ao aluno, com o objetivo de estimular o seu auto-aprimoramento e o seu espírito de competitividade.

As questões que vou apresentar podem ser resolvidas por meio do método tradicional, mas pode-se também se utilizar de meios alternativos, o que eu chamo de “Bizu”.

Em nosso próximo contato, vou mostrar a resolução destas questões, tanto pelo método tradicional, quanto pelo “método do Bizu”.

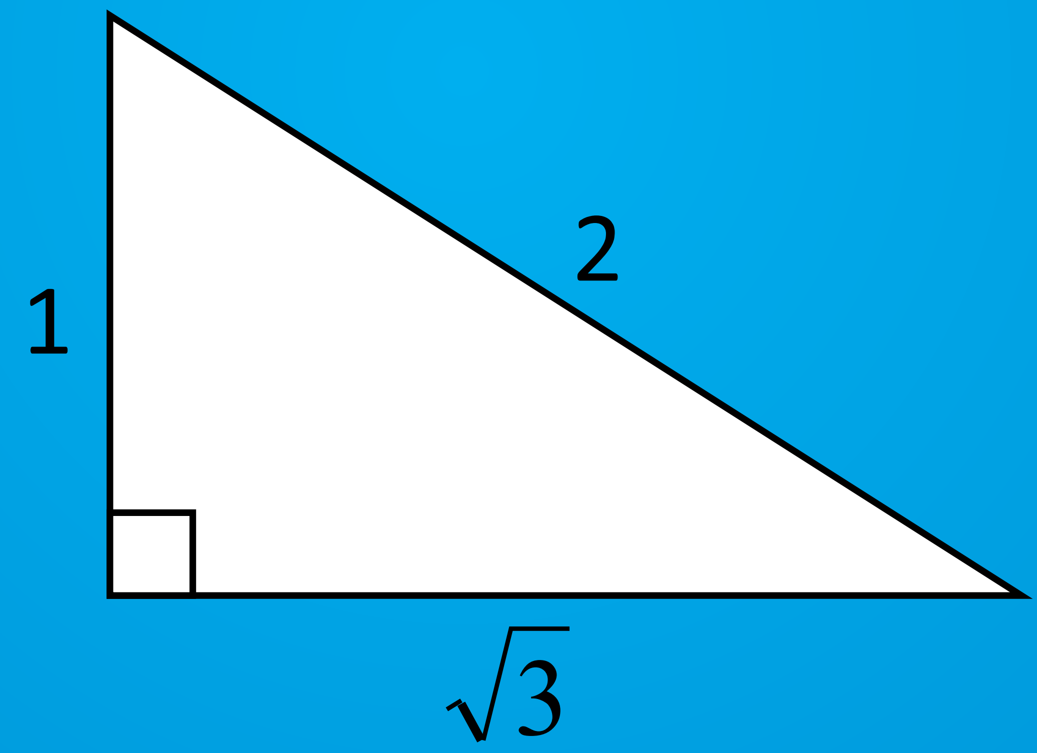
Recomendo ao aluno que, ao iniciar a resolução do problema, cronometre o seu tempo de desenvolvimento, não o interrompendo, mesmo que seja necessário reiniciar a resolução.

Este procedimento tem por objetivo constatar as vantagens de se utilizar o “Bizu”. Assim, no próximo e-book, após a apresentação da resolução, cronometre novamente a resolução, desta vez, empregando-se o método do Bizu. Depois, faça as comparações.

DESAFIO #1

Desafio 1:

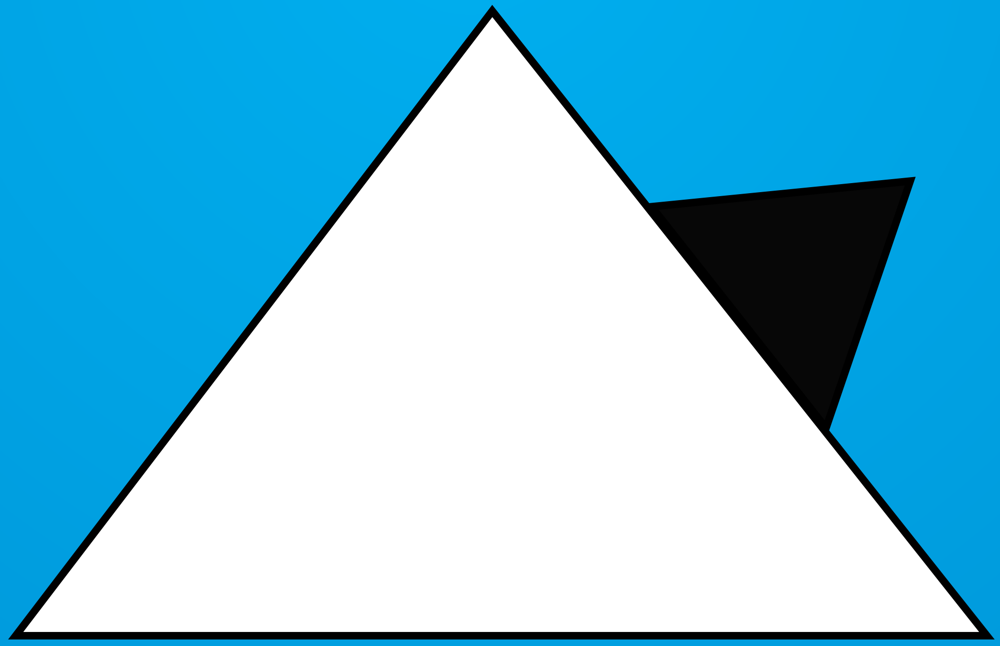
Com base no triângulo abaixo, calcule a tangente de 15º .



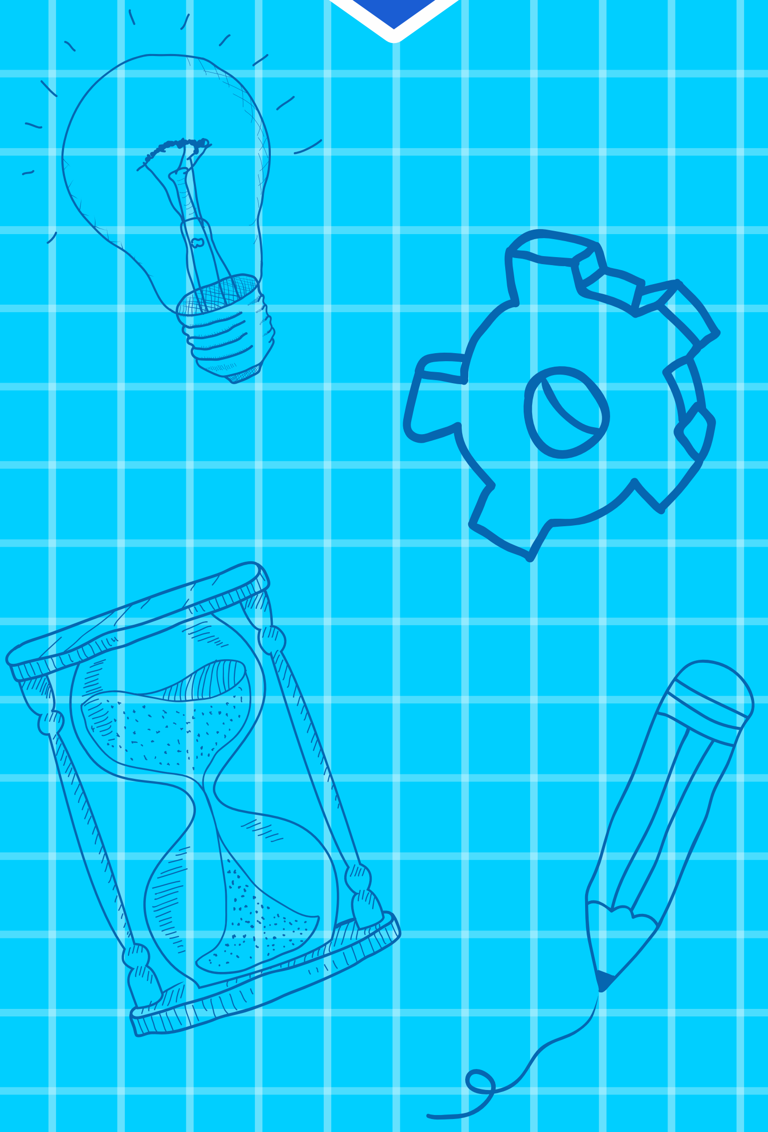
DESAFIO #2

Desafio 2:

Na figura dada, o lado do triângulo eqüilátero menor divide o lado do triângulo eqüilátero maior em três partes iguais. Sabendo-se que a área do triângulo menor mede $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm2 , qual é a medida da área do maior?



DESAFIO #3



Desafio 3: Considere todos os números inteiros positivos escritos com exatamente cinco algarismos ímpares distintos. Qual é o valor da soma desses números?

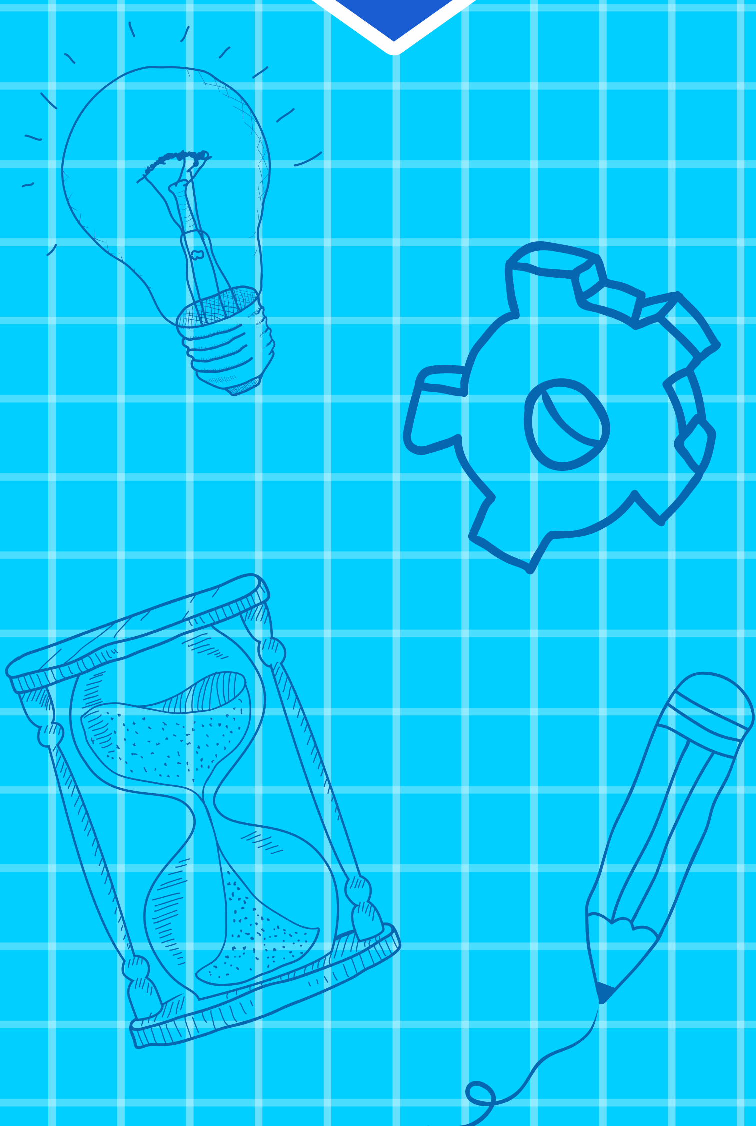
a) 6666600
b) 6666000
c) 6660000
d) 6600000
e) 6000000

DESAFIO #4

Desafio 4: Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal (*) indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos: 1234567891011121314.................*. O resto da divisão do número formado por 16 é igual a:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

DESAFIO #5



Desafio 5:

(ITA) O ângulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos às 10 horas e 15 minutos é:

a) 142º30′
b) 142º40′
c) 142º00′

QUEREMOS QUE VOCÊ TRACE VOOS CADA VEZ MAIS ALTOS RUMO À APROVAÇÃO!

FIQUE DE OLHO NO SEU EMAIL, EM BREVE ENTRAREMOS EM CONTATO COM MAIS NOVIDADES.

MATEMÁTICA EM BIZUS

CLAUDIO DE OLIVEIRA E CASTRO